В. М. Глушков, Строение локально бикомпактных групп и пятая проблема Гильберта, *УМН*, 1957, том 12, выпуск 2, 3–41

1957 г. март—апрель *т. XII, вып. 2 (74)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

СТРОЕНИЕ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ГРУПП И ПЯТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

В. М. Глушков

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В 1900 г. в числе других важнейших математических проблем Д. Гильбертом [1] была сформулирована также следующая (пятая) проблема: построить теорию непрерывных групп преобразований (теорию групп Ли) без предположения о дифференцируемости функций, определяющих группу.

После того, как было выработано четкое понятие топологической группы, под пятой проблемой Гильберта стали понимать проблему о возможности введения аналитических координат (т. е. таких координат, в которых закон умножения задается аналитическими функциями) в некоторой окрестности единицы произвольной локально евклидовой группы[1]). Ясно, что подобная формулировка конкретизирует, но вместе с тем и сужает задачу, поставленную Гильбертом, ибо в ее поле зрения попадают лишь параметрические группы, а не собственно группы преобразований. Кроме того, хорошо известно, что теория, построенная С. Ли, имела дело не с группами в современном смысле слова, а лишь с локальными группами. Поэтому более естественно весь круг вопросов, затронутых Гильбертом в его пятой проблеме, относить именно к локальным группам[2]). Однако, следуя установившейся традиции, под пятой проблемой Гильберта в настоящей статье мы будем понимать сформулированную выше «суженную»

[1]) Топологическая группа называется локально евклидовой, если она обладает окрестностью единицы, гомеоморфной кубу евклидова пространства.

[2]) На это обстоятельство обратил мое внимание А. И. Мальцев.

проблему о существовании аналитических координат в локально евклидовых группах в целом. Наряду с конкретизацией пятой проблемы Гильберта развитие топологической алгебры в 30-е годы привело к постановке более общей и значительно более важной проблемы о строении произвольных локально бикомпактных групп. Обе проблемы оказались тесно связанными между собой, причем решение первой из них для того или иного класса групп сразу же перекрывалось соответствующими успехами в решении второй. Так, решение пятой проблемы Гильберта для бикомпактных групп, полученное Нейманом [2], было уже в следующем году перекрыто Понтрягиным [3], исследовавшим строение произвольных бикомпактных групп со второй аксиомой счетности. Решение пятой проблемы Гильберта для коммутативных групп было получено Понтрягиным [4] в результате исследования строения коммутативных локально бикомпактных групп. В 1941 г. Шевалле [5] опубликовал решение пятой проблемы Гильберта для разрешимых групп, а в 1946 г. Мальцев [6] перекрыл этот результат, исследовав локальную структуру разрешимых связных локально бикомпактных групп. Наконец, в 1952 г. Глисон [7], Монтгомери и Зиппин [8] решили пятую проблему Гильберта в общем случае, а в 1953 г. Ямабе [9], [10], усовершенствовав методы Глисона, доказал, что во всякой локально бикомпактной группе имеется открытая подгруппа, являющаяся проективным пределом групп Ли. Этот результат вместе с более ранним результатом Ивасава ([11], теорема 11) позволяет сформулировать следующую теорему: *произвольная связная локально бикомпактная группа локально изоморфна прямому произведению локальной группы Ли и бикомпактной группы.*

В действительности оказывается, что от требования связности в этой теореме можно отказаться и получить следующий законченный результат:

Теорема A. *Для любой локально бикомпактной группы G и любой окрестности U ее единицы найдется такая открытая окрестность единицы V этой группы, которая содержится в U и распадается в прямое произведение связной локальной группы Ли L и бикомпактной группы.* ***При этом,*** *если группа G не является вполне несвязной, то окрестность U может быть выбрана так, что при любом разложении указанного вида локальная группа Ли L имеет положительную размерность.*

Ясно, что все результаты по пятой проблеме Гильберта и по многим смежным вопросам являются более или менее очевидными следствиями этой теоремы. Однако сама теорема A в указанных выше работах не доказывается и даже не формулируется. Не сделано этого и в вышедшей недавно книге Монтгомери и Зиппина [12], содержащей, в частности, полное решение пятой проблемы Гильберта методами Глисона-Ямабе. Наоборот, в настоящей статье доказательство теоремы A рассматривается как основная цель. Новым моментом, позволяющим провести такое доказательство, является усиление результатов работы Ивасава [11], выполненное в § 1. В целом же статья носит обзорный характер. Кроме упомянутой работы Ивасава [11], основными источниками для ее написания послужили две работы Ямабе [9] и [10] и работа Мальцева [6]. Все содержание статьи представляет собою по существу доказательство теоремы A, разбитое на ряд этапов.

Теорема B, дающая решение пятой проблемы Гильберта в общем случае, является почти очевидным следствием теоремы A.

В доказательствах широко используются свойства бикомпактных и коммутативных локально бикомпактных групп и инвариантное интегрирование на группе. В связи с этим от читателя требуется свободное владение основами теории топологических групп в объеме монографий Л. С. Понтрягина [13] и А. Вейля [14]. Используется также теорема Картана о том, что локально бикомпактная группа, допускающая точное непрерывное представление в группу Ли, сама является группой Ли. Доказательство этой теоремы можно найти в монографии К. Шевалле [15] (стр. 190—198), там же (стр. 163—179) содержатся необходимые сведения о каноническом отображении. Требования, предъявляемые к знаниям по функциональному анализу, являются более скромными и ограничиваются тремя первыми главами книги Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [16].

§ 1. Проективно-лиевы группы

Настоящий параграф посвящен изучению понятия, близкого к понятию L-групп, введенных Ивасава [11]. Основным результатом, усиливающим (за счет отказа от связности) теорему 11 из [11], является теорема 2. В ее доказательстве применены методы, отличные от методов Ивасава, использована, в частности, идея, принадлежащая Мальцеву [6]. Что же касается теоремы 1, то она по существу доказана (хотя и не сформулирована) в [11], однако приводимое ниже доказательство несколько изменено и упрощено по сравнению с доказательством Ивасава. Лемма 2 принадлежит Мальцеву [6].

1.1. Определение. Локально бикомпактная группа G называется *проективно-лиевой*, если в любой окрестности V ее единицы содержится бикомпактный нормальный делитель $B=B(V)$ такой, что фактор-группа G/B есть группа Ли (не обязательно связная).

1.2. Лемма 1. *Любая замкнутая подгруппа и любая фактор-группа проективно-лиевой группы G также являются проективно-лиевыми группами.*

Доказательство. Пусть A — замкнутая подгруппа группы G, V — произвольная окрестность единицы в G, $B\subset V$ — бикомпактный нормальный делитель с лиевой фактор-группой G/B. Тогда $C=B\cap A\subset V\cap A$ есть бикомпактный нормальный делитель в A. Группа A/C локально бикомпактна и допускает непрерывный взаимно однозначный гомоморфизм в группу Ли $G/B: A/C=A/(A\cap B)\sim AB/B\subset G/B$. Поэтому на основании теоремы Картана, сформулированной во введении, A/C есть также группа Ли. Пусть теперь $G'=G/N$ — произвольная фактор-группа группы G. В окрестности $V'=VN/N$ ее единицы содержится бикомпактный нормальный делитель $B'=BN/N$. Фактор-группа $G'/B'\cong G/BN$ изоморфна фактор-группе группы Ли G/B и потому сама является группой Ли. Лемма доказана.

1.3. Лемма 2. *Если в топологической группе G содержится коммутативный бикомпактный нормальный делитель A такой, что фактор-группа G/A связна, то A содержится в центре группы G.*

Доказательство. Пусть $\chi(a)$ — характер группы A. Тогда $\chi_g(a) = \chi(g^{-1}ag)$ $(g \in G)$ — снова характер этой же группы. Так как $\chi_{bg} = \chi_g$ для любого $b \in A$, то соответствие $g \to \chi_g$ индуцирует непрерывное отображение фактор-группы G/A в группу характеров A^* группы A. Поскольку A^* — дискретна, образ связной группы G/A при этом отображении может состоять лишь из одного элемента; иначе говоря, для любых $a \in A$, $g \in G$ и $\chi \in A^*$ $\chi(g^{-1}ag) = \chi(a)$; откуда ввиду полноты системы характеров получаем: $g^{-1}ag = a$. Лемма доказана.

1.4. Теорема 1. *Пусть B — произвольный бикомпактный нормальный делитель локально бикомпактной*[1]) *группы G, N — централизатор B в G. Если группа G/B — связна, то $G = BN$.*

Доказательство. Теорема будет, очевидно, доказана, если показать, что любой элемент группы G индуцирует в B автоморфизм, являющийся внутренним автоморфизмом группы B.

Предположим сначала, что B — связная группа Ли. Тогда, как известно ([13], теорема 100), $B = SZ$, где Z — центр группы C, а S — ее максимальная полупростая связная инвариантная подгруппа. Будучи, очевидно, характеристическими в B, группы S и Z инвариантны в G. Фактор-группы G/S и G/Z — связны. Кроме того, как нетрудно видеть, элемент $g \in G$ тогда и только тогда индуцирует внутренний автоморфизм группы B, когда он индуцирует внутренние автоморфизмы в подгруппах S и Z. Поэтому достаточно рассмотреть случаи $B = Z$ и $B = S$.

В первом случае теорема верна в силу леммы 2. Во втором случае B есть связная компактная полупростая группа Ли. Тогда, как хорошо известно ([13], теорема 102), всякая связная подгруппа ее автоморфизмов содержится в группе ее внутренних автоморфизмов. Поэтому теорема верна и в этом случае, ибо, как нетрудно видеть, отображение, сопоставляющее каждому элементу $g \in G$ автоморфизм $x \to g^{-1}xg$, индуцируемый им в группе B, является непрерывным гомоморфизмом связной группы G в группу автоморфизмов группы B.

Пусть теперь B — произвольная компактная группа Ли. Обозначим через B_0 связную компоненту ее единицы. $B' = B/B_0$ есть конечный нормальный делитель группы $G' = G/B_0$, а группа $G'/B' \cong G/B$ — связна. Если K — связная компонента единицы группы G, то $B_0 \subset K$, а $K' = K/B_0$ есть связная компонента единицы в G'. Группа G'/K' вполне несвязна и, будучи локально бикомпактной, не может иметь истинных связных фактор-групп. Поэтому ее нормальный делитель $B'K'$, определяющий связную фактор-группу, совпадает с G'. Ввиду конечности B' подгруппа K' имеет конечный индекс в G', а так как $G'/K' \cong G/K$, то подгруппа K — открыта в G. Если N_1 — централизатор B_0 в K, то, по доказанному ранее, $B_0N_1 = K$. Относя каждому элементу из K автоморфизм, индуцируемый им в фактор-группе B/B_0, получим непрерывный гомоморфизм группы K в конечную группу. Ввиду связности K это отображение тривиально, так что любой

[1]) Локальная бикомпактность группы G не является существенным требованием и введена лишь для упрощения доказательства.

элемент из K, а тем более любой элемент из N_1 индуцирует в B/B_0 тождественный автоморфизм. Содержа открытую подгруппу $K=B_0N_1$, подгруппа BN_1 также открыта в G. Но $BN_1 \supset B$, а группа G/B связна. Поэтому

$$BN_1 = G. \tag{1}$$

Если g — любой элемент из N_1, а b — любой элемент из B, то $b^g=g^{-1}bg=bu$, где $u=u(b)\in B_0$.

Так как, по определению N_1, элемент g перестановочен с элементами из B_0, то для любого $c \in B_0$ имеем:

$$(bc)^g=b^gc=buc \text{ и } (bc)^g=(bcb^{-1}b)^g=bcb^{-1}b^g=bcb^{-1}bu=bcu.$$

Отсюда следует, что элемент u содержится в центре Z группы B_0 и зависит только от смежного класса по B_0, к которому принадлежит b. Далее, из $(bb_1)^g=b^gb_1^g$ легко вывести, что

$$u(bb_1)=b_1^{-1}u(b)\,b_1u(b_1)=u(b)^{b_1}u(b_1) \quad (b,\ b_1\in B). \tag{2}$$

Обозначим через v произведение $\prod\limits_b u(b)$, распространенное на все классы вычетов группы B по модулю B_0, а через n — число этих классов, т. е. индекс B_0 в B. Тогда из (2) следует, что

$$v=u(b_1)^n v^{b_1}, \tag{3}$$

для всех $b_1\in B$. Так как Z — компактная (не обязательно связная) абелева группа Ли, то существует конечная характеристическая подгруппа $Z_1\subset Z$, определяющая торовидную фактор-группу Z/Z_1. Поэтому найдется такой элемент $w\in Z$, что $w^n\equiv v^{-1} \pmod{Z_1}$. Если теперь положить $h=gw$ и $b^h=bu'(b)$, где $b\in B$, то $u'(b)=(b^{-1}w^{-1}b)\,wu(b)$, а $u'(b)^n=(b^{-1}w^{-n}b)\,w^nu(b)^n\equiv v^bv^{-1}u(b)^n \pmod{Z_1}$ и ввиду (3) $u'(b)^n\in Z_1$.

Пусть Z_2 — множество всех элементов из Z, n-е степени которых содержатся в Z_1. Тогда Z_2 — конечная группа, а $u'(b)$ можно рассматривать как функцию на конечной группе B/B_0 со значениями из конечной группы Z_2. Так как существует лишь конечное число таких функций, то доказано, что элементы из N_1 могут индуцировать лишь конечное число автоморфизмов φ_i группы B таких, что $\varphi_i\varphi_j^{-1}$ при $i\neq j$ не являются внутренними автоморфизмами этой группы. Иными словами, если обозначить через N централизатор B в G, то замкнутый нормальный делитель BN группы G таков, что группа $N_1/(BN\cap N_1)$ — конечна. Но эта группа изоморфна, очевидно, группе $BNN_1/BN=G/BN$ (см. (1)), а группа G/B связна и не может поэтому иметь истинных конечных фактор-групп. Следовательно, $G=BN$, так что теорема верна и в этом случае.

Предположим, наконец, что B — произвольный бикомпактный нормальный делитель группы G со связной фактор-группой G/B. Рассмотрим какое-нибудь непрерывное линейное представление группы B с характером $\chi(b)$ $(b\in B)$ и определим подгруппу A_χ как множество всех тех элементов $g\in G$, для которых характер $\chi^g=\chi(g^{-1}bg)$ совпадает с характером $\chi=\chi(b)$. Пусть

$$\chi=n_1\chi_1+\ldots+n_r\chi_r \quad (n_i>0;\ i=1,\ldots,r) \tag{4}$$

— разложение χ на неприводимые характеры и пусть

$$\chi^g = n_1^g\chi_1 + \ldots + n_r^g\chi_r + \sum \chi' \quad (n_i^g \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, r) \tag{5}$$

— соответствующее разложение для χg. Если $\mu(b)$ — мера Хаара на B с полной мерой, равной 1, то $n_i^g = \int\limits_B \chi^g\overline{\chi}_i d\mu(b)$ есть целочисленная непрерывная функция от g. Так как при $g = e$ $n_i^g = n_i$, то найдется такая окрестность U единицы в группе G, что $n_i^g = n_i$ для всех $g \in U$ и всех $i = 1, \ldots, r$. Кроме того, ввиду биинвариантности меры Хаара на бикомпактных группах ([14], стр. 50) имеем:

$$\int\limits_B \chi(b)\overline{\chi}(b)\,d\mu(b) = \int\limits_B \chi(g^{-1}bg)\overline{\chi}(g^{-1}bg)\,d\mu(b).$$

Но ввиду известных соотношений ортогональности и условия нормировки меры выписанные интегралы равны суммам квадратов коэффициентов в разложениях (4) и (5) соответственно. Поэтому для $g \in U$ эти разложения просто совпадают, т. е. $\chi = \chi^g$ для $g \in U$ и, следовательно, $U \subset A_\chi$. Тем самым доказано, что группа A_χ открыта в G. Вместе с тем очевидно, что $B \subset A_\chi$. Но тогда ввиду связности G/B имеем $A_\chi = G$.

Обозначим через m степень рассматриваемого представления, а через $R = R(\chi)$ — его ядро. Так как всякое представление бикомпактной группы эквивалентно унитарному, то $\chi(b) = m$ тогда и только тогда, когда соответствующая матрица единичная, т. е. когда $b \in R$. Поэтому для любого элемента $g \in A_\chi = G$ $g^{-1}Rg = R$. Иначе говоря, подгруппа R инвариантна в G. Если $B' = B/R$, $G' = G/R$, то B' является компактной группой Ли, а фактор-группа $G'/B' \cong G/B$ — связна. Тогда, как было доказано выше, для любого элемента $g \in G$ найдется такой элемент $b \in B$, что g и b индуцируют одинаковые автоморфизмы в группе $B' = B/R(\chi)$. Обозначим через $M(g, \chi)$ множество всех $b \in B$, обладающих таким свойством. Множества $M(g, \chi)$, очевидно, замкнуты в B и потому бикомпактны. Только что была установлена непустота любого из таких множеств. Кроме того, ясно, что $M(g, \chi) \cap M(g, \chi_1) \supset M(g, \chi + \chi_1)$, ибо $R(\chi) \cap R(\chi_1) \supset R(\chi + \chi_1)$. Поэтому любое конечное число множеств $M(g, \chi)$ (при фиксированном g) обладает непустым пересечением. Как известно, в таком случае найдется элемент $d \in \bigcap\limits_\chi M(g, \chi)$. Ввиду определения d он содержится в B и индуцирует тот же автоморфизм, что и элемент g, на любой из фактор-групп $B/R(\chi)$. Из полноты системы линейных представлений для B следует, что $\bigcap\limits_\chi R(\chi)$ содержит лишь единицу и, следовательно, $g^{-1}bg = d^{-1}bd$ для любого $b \in B$. Так как элемент $g \in G$ выбирался произвольно, то теорема полностью доказана.

1.5. Лемма 3. *Если в локально бикомпактной группе G имеются два нормальных делителя A и B такие, что G/A и G/B — группы Ли, то $G/(A \cap B)$ также является группой Ли.*

Доказательство. Группа $G/(A \cap B)$ — локально бикомпактна и допускает непрерывный взаимно однозначный гомоморфизм в группу

Ли $G/A \times G/B$, а потому по теореме Картана, сформулированной во введении, сама является группой Ли.

1.6. Лемма 4. *Пусть G — локально бикомпактная группа, A — ее замкнутый центральный нормальный делитель, φ — естественный гомоморфизм G на $G' = G/A$. Если G' — группа Ли, то для любой ее однопараметрической подгруппы $g'(t)$ найдется однопараметрическая подгруппа $g(t) \subset G$ такая, что $\varphi(g(t)) = g'(t)$.*

Доказательство. Обозначим через $B' = B/A$ замыкание $g'(t)$ в G'. B содержит всюду плотную подгруппу, являющуюся объединением возрастающей последовательности подгрупп B_n таких, что B_n порождается всеми элементами центральной подгруппы A и каким-либо элементом из смежного класса $g'\left(\frac{1}{n!}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ясно, что все подгруппы B_n, а потому и группа B, коммутативны.

Если группа A — дискретна, то справедливость утверждения леммы очевидна, так как группы B и B/A локально изоморфны, а гомоморфизм локальных однопараметрических подгрупп продолжается до гомоморфизма соответствующих групп в целом единственным способом. В общем случае A содержит подгруппу A_0, разлагающуюся в прямое произведение векторной и бикомпактной групп, и такую, что группа A/A_0 дискретна ([14], стр. 125).

Так как в связной коммутативной локально бикомпактной группе любая векторная подгруппа является прямым слагаемым, то достаточно рассмотреть случай, когда группа A бикомпактна. Ясно, что B/A есть либо торовидная, либо одномерная векторная группа. В первом случае наша лемма верна в силу более общей леммы Понтрягина ([13], стр. 334). Во втором случае группа характеров B^* группы B содержит одномерную векторную подгруппу R^* (аннулятор A), фактор-группа B^*/R^* по которой дискретна. Но тогда R^* — прямой множитель в B^*, значит, A — прямой множитель в B, так что справедливость утверждения леммы очевидна.

1.7. Лемма 5. *Пусть G — топологическая группа, A — ее замкнутая подгруппа, B — подмножество с бикомпактным замыканием $\overline{B}$ такое, что в $A \cap \overline{B}$ входит лишь единица, B содержит единицу, а AB содержит окрестность единицы группы G. Тогда произведение любых двух окрестностей единицы V_A и V_B в множествах A и B соответственно содержит некоторую окрестность единицы группы G.*

Доказательство. Выберем такую окрестность W единицы группы G, что $A \cap WW^{-1} \subset V_A$, и некоторую окрестность W_B единицы в множестве $\overline{B}$, открытую в $\overline{B}$, так чтобы $W_B \subset W$ и $W_B \cap B \subset V_B$. Тогда

$$WW_B^{-1} \cap A \subset V_A. \tag{1}$$

Множество $B_1 = \overline{B} \setminus W_B$ замкнуто в $\overline{B}$ и потому бикомпактно. Кроме того, пересечение $B_1 \cap A$ пусто. Но тогда пусто также пересечение A с бикомпактным множеством B_1^{-1} (ибо A является подгруппой). Поэтому найдется такая окрестность U единицы группы G, что

$$UB_1^{-1} \cap A = \varnothing. \tag{2}$$

Пусть теперь V — произвольная окрестность единицы в G, содержащаяся в $U \cap W$ и в AB:

$$V \subset U \cap W \cap AB. \tag{3}$$

Покажем, что $V \subset V_A V_B$. Действительно, пусть v — произвольный элемент из V. Ввиду (3) $v = ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Тогда $b \in W_B$. Действительно, если бы $b \bar{\in} W_B$, то $b \in B_1$, откуда, в силу соотношения (2), $Ub^{-1} \cap A = \varnothing$, или $U \cap Ab = \varnothing$, что противоречит включению $v = ab \in V \subset U$. Итак $b \in W_B$ и, значит, $b \in W_B \cap B \subset V_B$. Но тогда $a = vb^{-1} \in WW_B^{-1} \cap A \subset V_A$ и $v \in V_A V_B$. Ввиду произвольности выбора $v \in V$ лемма доказана.

1.8. Теорема 2. *Во всякой проективно-лиевой группе G существует сколь угодно малая открытая окрестность единицы, распадающаяся в прямое произведение, связной локальной группы Ли и бикомпактной группы.*

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность единицы в группе G, B — содержащийся в ней бикомпактный нормальный делитель такой, что G/B есть группа Ли. Так как связная компонента единицы в группе Ли открыта, то, не нарушая общности, можно считать группу G/B связной. Обозначим через N централизатор множества B в G. Тогда, по теореме 1,

$$G = NB. \tag{1}$$

Группа $Z = N \cap B$ есть бикомпактная центральная подгруппа в B и одно временно коммутативный (бикомпактный) нормальный делитель в N. Ввиду бикомпактности Z можно применить теорему об изоморфизме ([14], стр. 26

$$N/Z = N/(B \cap N) \cong NB/B = G/B. \tag{2}$$

Так что $N' = N/Z$ есть связная группа Ли. Но тогда, по лемме 2, Z входит в центр N.

Обозначим через H' алгебру Ли группы N', через $(h_1', \ldots, h_n')$ — некоторый базис этой алгебры, через (c_{ij}^k) — структурный тензор, отнесенный к этому базису, а через φ — естественный гомоморфизм N на N'. Хорошо известно, что с помощью канонического (экспоненциального) отображения некоторую окрестность нуля алгебры Ли можно отождествить с окрестностью единицы в соответствующей группе Ли. Чтобы избежать усложнения обозначений, мы будем предполагать эти окрестности просто совмещенными, не вводя специально символа для канонического отображения. Тогда существует такое положительное число δ, что множество элементов вида $(t_1 h_1')(t_2 h_2')\ldots(t_n h_n')$ при $|t_i| < \delta$ представляет собою окрестность единицы в группе Ли $N' = N/Z$ ([13], стр. 299), ибо множества элементов $t_i h_i'$ ($|t_i| < \delta$; $i = 1, \ldots, n$) представляют собой локальные однопараметрические подгруппы в N'. На основании леммы 4, в группе $N \subset G$ найдется система однопараметрических погрупп $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ таких, что

$$\varphi(g_i(t)) = th_i' \qquad (|t_i| < \delta; \quad i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Построим вещественную алгебру Ли с базисом $S = \{h_k, l_{i,j};\ i, j, k = 1, \ldots, n;\ i \neq j\}$ и с определяющими соотношениями:

$$[h_i, h_j] = \sum_k c_{ij}^k h_k + l_{ij}; \quad [h_k, l_{ij}] = 0, \quad [h_k, h_p] = 0, \tag{4}$$

где $i \neq j$, i, j, k, $p = 1, \ldots, n$. Некоторую открытую связную окрестность V нуля этой алгебры отождествим, как и раньше, с локальной группой Ли. Уменьшая в случае необходимости выбранное выше число δ, можно считать, что $th_i \in V$ при $|t| < \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Определим отображение ψ некоторого подмножества локальной группы V в группу N, полагая

$$\psi(th_i) = g_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n; \ |t| < \delta). \tag{5}$$

Докажем, что это отображение можно продолжить до непрерывного локального гомоморфизма V в N. Действительно, пусть Z_α — произвольный бикомпактный нормальный делитель группы N с лиевой фактор-группой $N_\alpha = N/Z_\alpha$, φ_α — естественный гомоморфизм N на N_α, а H_α — алгебра Ли группы N_α (группа N — проективно-лиева по лемме 1). Ввиду леммы 3 можно, не нарушая общности, считать, что $Z_\alpha \subset Z$. Тогда базис алгебры H_α можно выбрать из элементов ее центра и элементов $h_1^\alpha, \ldots, h_n^\alpha$ таких, что

$$th_i^\alpha = \varphi_\alpha(g_i(t)) = \varphi_\alpha(\psi(th_i)) \quad (i = 1, \ldots, n; \ |t| < \delta). \tag{6}$$

Ясно, что гомоморфизм алгебры H_α на алгебру H', индуцируемый естественным гомоморфизмом $\varphi\varphi_\alpha^{-1}$ группы N_α на группу $N' = N/Z$, переводит h_i^α в h_i' $(i = 1, \ldots, n)$. Поэтому структурный тензор алгебры H_α в части, относящейся к $h_1^\alpha, \ldots, h_n^\alpha$, тождественен со структурным тензором (c_{ij}^k). Ввиду соотношений (4) и (5) ясно теперь, что отображение $\varphi_\alpha\psi$ части H в H_α может быть продолжено (и притом однозначно) до гомоморфизма ψ_α всей алгебры H в алгебру H_α (окрестность нуля в H_α предполагается совмещенной с окрестностью единицы в N_α). Этот гомоморфизм индуцирует, очевидно, непрерывный локальный гомоморфизм локальной группы Ли V в группу $N_\alpha = N/Z_\alpha$, который, ввиду соглашения об отождествлении V с частью H, мы также обозначим через ψ_α. Соотношения (6) показывают, что для любого $Z_\beta \subset Z_\alpha$ $\psi_\alpha = \varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}\psi_\beta$. А так как N, будучи проективно-лиевой группой (лемма 1), есть проективный предел групп N_α относительно гомоморфизмов $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$, то нами построен непрерывный локальный гомоморфизм локальной группы Ли V в группу N. Из построения этого гомоморфизма ясно, что он продолжает отображение ψ (ибо ψ_α продолжает отображение $\varphi_\alpha\psi$), поэтому мы будем обозначать его также через ψ. Заменяя, в случае необходимости, V ее (локальной) фактор-группой, можно считать гомоморфизм ψ взаимно однозначным, а так как V содержит окрестность единицы с бикомпактным замыканием, то ψ будет в действительности даже топологическим (локальным) изоморфизмом. Тем самым доказано, что в группе $N \subset G$ существует связная локальная группа Ли $L = \psi(V)$. Из соотношений (5) и (3) вытекает, что для любой окрестности M единицы в L MZ/Z есть окрестность единицы в $N' = N/Z$, а потому ввиду изоморфизма (2) MB/B содержит окрестность единицы в G/B, или окончательно:

$$MB \text{ содержит окрестность единицы группы } G. \tag{7}$$

Не нарушая общности, можно считать, очевидно, что $L \subset U$ и что L не содержит подгрупп «в целом», за исключением единичной. Пусть W — такая окрестность единицы в L, что $W = W^{-1}$ и $W^2 \subset L$. Так как группа G проективно-лиева, то, используя лемму 3, можно найти такой ее бикомпактный нормальный делитель A с лиевой фактор-группой G/A, что $A \subset B$ и $A \cap L \subset W$. Если теперь $a \in A \cap L$, то $a = e$. В самом деле, если $a \neq e$, то ввиду отсутствия в W подгрупп «в целом» найдется такое целое число n, что a, a^2, $\ldots$, a^{n-1} содержатся в W, а $a^n \overline{\in} W$. Ясно, что $a^n \in W^2 \subset L$ и $a^n \in A$, откуда $a^n \in A \cap L \subset W$. Полученное противоречие показывает, что $a = e$ и, следовательно:

$$A \cap L = \{e\}. \tag{8}$$

Кроме того, множества A и L поэлементно перестановочны, ибо $A \subset B$, а $L \subset N$.

Так как $B^0 = B/A$ есть бикомпактная группа Ли, то связная компонента ее единицы $K^0 = K/A$ имеет в B^0 конечный индекс. Но тогда $N^0 K^0$ (где $N^0 = N/A$) есть замкнутая подгруппа конечного индекса в $G^0 = G/A$. Такая подгруппа обязательно открыта в G^0. Поэтому, заменяя, в случае необходимости, G на $N \cdot K$, можно считать группу B^0 связной. Далее, поскольку множества B^0 и N^0 поэлементно перестановочны, то любой нормальный делитель $A_1^0 = A_1/A$ группы B^0 будет нормальным делителем и в G^0. Если теперь пересечение $A_1^0 \cap L^0$ (где $L^0 = LA/A$) дискретно, то, уменьшая, в случае необходимости, локальную группу L, можно считать, что это пересечение содержит лишь единицу. Тогда $A_1 \subset B$ является бикомпактным нормальным делителем группы G, поэлементно перестановочным с L и пересекающимся с L только по единице. Мы можем, следовательно, заменить A на A_1. Поскольку любая возрастающая цепь замкнутых связных нормальных делителей в группе Ли B^0 конечна, то на основании сказанного можно считать, что пересечение локальной группы Ли L^0 с любым связным замкнутым нормальным делителем группы B^0 недискретно. Будучи поэлементно перестановочными, множества L^0 и B^0 могут содержать в пересечении лишь центральные элементы группы B^0. Поэтому B^0 не может содержать связных нормальных делителей с дискретным центром, в частности, — связных полупростых нормальных делителей. Используя известную теорему о строении связных бикомпактных групп Ли ([13], теорема 100), получаем отсюда, что группа B^0 коммутативна, т. е. является конечным прямым произведением одномерных торовидных групп T_i: $B^0 = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_m$. Любая из подгрупп T_i инвариантна в B^0 и потому, согласно нашему предположению, должна иметь с L^0 недискретное пересечение. Так как локальную группу L^0 можно считать сколь угодно малой, то отсюда следует, что $L^0 \cap T_i$ есть окрестность единицы в T_i $(i = 1, \ldots, m)$. Но тогда, будучи локальной группой, L^0 содержит также некоторую окрестность единицы группы B^0. Более того, для любой окрестности Q единицы в L^0 $Q \cap B^0$ есть окрестность единицы в B^0. Выберем Q так, чтобы $\overline{Q} \cdot \overline{Q} \subset L^0$ ($\overline{Q}$ замыкание Q в L^0) и $Q = Q^{-1}$. Так как QB^0 содержит окрестность единицы группы G^0 (см. (7)), то для любой последовательности $\{g_i\}$ элементов из G^0, сходящейся к единице, почти все члены этой последовательности содержатся в QB^0 и могут быть поэтому записаны в виде:

$$g_i = q_i b_i, \quad \text{где} \quad q_i \in Q, \qquad b_i \in B^0.$$

Поскольку группа B^0 компактна, то последовательность $\{b_i\}$ можно считать сходящейся к некоторому элементу $b \in B^0$. Тогда последовательность $\{q_i\}$ сходится, очевидно, к элементу b^{-1}, который должен в силу этого содержаться в $\overline{Q}$ (множество $\overline{Q}$ бикомпактно и потому замкнуто в G^0). Последовательности $\{b^{-1}b_i\}$ и $\{q_i b\}$ сходятся к единице и содержатся в множествах B^0 и L^0 соответственно. Поэтому, начиная с некоторого номера, все их члены содержатся в Q, то тогда соответствующие $g_i = (q_i b)(b^{-1}b_i)$ содержатся в L^0. Так как это имеет место для любой последовательности элементов из G^0, сходящейся к единице, то $L^0 = LA/A$ содержит окрестность единицы в группе $G^0 = G/A$ или, что то же самое, LA содержит окрестность единицы в групе G.

Согласно нашему построению, множества L и A поэлементно перестановочны и $A \cap L = \{e\}$ (см. (8)). Поскольку L можно заменить любой открытой окрестностью ее единицы с бикомпактным замыканием, то можно считать даже, что $A \cap \overline{L} = \{e\}$ ($\overline{L}$ — замыкание L в G). Пусть $a \in A$, $l \in L$ и L_1 — окрестность единицы в L, выбранная так, чтобы $lL_1 \subset L$. Тогда $alAL_1 = aAlL_1 \subset AL$. Так как AL_1 содержит окрестность единицы в G (см. (7)), то нами доказано, что множество $D = AL$ открыто в G. Из леммы 5 и сказанного выше следует, что D распадается в прямое произведение бикомпактной группы A и связной локальной группы Ли L. Поскольку $B \supset A$ и L могут быть выбраны сколь угодно малыми, то теорема доказана.

§ 2. Полугруппа Глисона и вспомогательные функции

Настоящий параграф посвящен разработке аппарата, используемого в следующих двух параграфах. Излагаемые идеи и методы принадлежат Глисону [1] и Ямабе [9], [10]. Материал скомпанован в соответствии с потребностями данной статьи. Изложение пополнено рядом добавочных лемм, устранены отдельные неточности и введены некоторые упрощения (одним из которых является построение полугруппы Глисона лишь для рациональных значений параметра).

На протяжении всего параграфа рассматриваются лишь группы, удовлетворяющие первой аксиоме счетности. Квадратные скобки в этом и в следующих параграфах употребляются только для обозначения целой части числа.

2.1. Пусть $M_1, M_2, \ldots$ — последовательность множеств топологического пространства B. Рассмотрим множество M' всех точек из B, обладающих тем свойством, что любая окрестность всякой точки из M' пересекается с бесконечным числом множеств M_i, и множество M'' всех точек из B таких, что любая окрестность всякой точки из M'' пересекается почти со всеми множествами M_i. Если $M' = M'' = M$, то говорят, что последовательность $\{M_i\}$ сходится к пределу M: $\lim M_i = M$. Предельное множество M всегда замкнуто. Если пространство B бикомпактно, хаусдорфово и удовлетворяет второй аксиоме счетности (т. е. является компактом), то, как хорошо известно ([17], § 29,2), из любой последовательности его подмножеств можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2.2. Лемма 6. *В топологической группе G с первой аксиомой счетности всякое бикомпактное подмножество B удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Пусть $\{U_1\ U_2,\ \ldots\}$ — счетная полная система окрестностей единицы группы G. Для каждого натурального числа k выделим конечную систему элементов $b_{k,1},\ \ldots,\ b_{k,n_k}$ из B таких, что множества $b_{k,i}U_k$ $(i=1,\ \ldots,\ n_k)$ покрывают B. Множество $N=\{b_{k,i};\ i=1,\ \ldots,\ n_k;\ k=1,\ 2,\ \ldots\}$ не более чем счетно и содержится в B. Покажем, что оно всюду плотно в B. Действительно, пусть $b\in C\subset B$, где множество C открыто в B. Тогда найдется такой номер k, что $bU_k^{-1}\cap B\subset C$. Множества $b_{k,i}U_k$ $(i=1,\ \ldots,\ n_k)$ образуют покрытие B. Поэтому найдется элемент $b_{k,j}\in N$ такой, что $b\in b_{k,j}U_k$. Но тогда $b_{k,j}\in bU_k^{-1}\cap B\subset C$, что и доказывает плотность N в B. Удовлетворяя первой аксиоме счетности и обладая счетным всюду плотным подмножеством, множество B удовлетворяет и второй аксиоме счетности. Лемма доказана.

2.3. Определение. Пусть G — локально бикомпактная группа с первой аксиомой счетности, V — некоторая бикомпактная, симметричная $(V=V^{-1})$ окрестность ее единицы. Бесконечную совокупность множеств $D_n\subset V$, занумерованных с помощью некоторого множества J натуральных чисел, будем называть *V-последовательностью*, если выполнены следующие условия:

1) Любая окрестность единицы группы G содержит почти все множества D_n.

2) $D_n^n\subset V$, $D_n^{n+1}\not\subset V$ для всех $n\in J$.

3) Множества D_n симметричны $(D_n=D_n^{-1})$ для всех $n\in J$ и каждое из них содержит единицу e группы G.

2.4. Для любого фиксированного натурального числа m множества D_n^{mn} $(n\in J)$ содержатся в бикомпактном множестве V^m. Поэтому, применяя диагональный процесс и заменяя в случае необходимости множество J некоторым его подмножеством, можно ввиду сказанного выше (n° 2.1 и n° 2.2) считать, что для всех неотрицательных рациональных чисел s существуют пределы $\lim D_n^{[sn]}=D(s)$ ($[sn]$ — целая часть числа sn). Каждое из множеств $D(s)$ замкнуто и, содержась в бикомпактном множестве $V^{[s]+1}$, бикомпактно.

Из приведенного определения непосредственно следует, что множество $D(1)$ имеет нетривиальное пересечение с границей окрестности V. Следовательно, $D(1)$ содержит элементы, отличные от единицы группы G. Ясно также, что все множества $D(s)$ симметричны и что $D(s)\subset D(t)$ при $s<t$. Если s_1 и s_2 — два неотрицательных рациональных числа, то $D_n^{[(s_1+s_2)n]}=D_n^{[s_1n]}D_n^{[s_2n]}D_n^{\delta}$, где $\delta=0$ или $\delta=1$. Поскольку для достаточно больших n D_n содержится в любой заданной окрестности единицы, то, переходя в последнем равенстве к пределу, получим соотношение

$$D(s_1)\,D(s_2)=D(s_1+s_2).$$

Это соотношение показывает, что совокупность множеств $D(s)$ (s пробегает все неотрицательные рациональные числа) составляет полугруппу, которую мы будем называть *полугруппой Глисона* данной V-последовательности. Всякую точку, содержащуюся в $D(1)$, но не содержащуюся в $\bigcup_{\alpha<1} D(\alpha)$, будем называть *граничной точкой* полугруппы.

2.5. Лемма 7. *Если полугруппа Глисона не имеет граничных точек, то множество $D(1)$ является подгруппой.*

Доказательство. Покажем, что отсутствие граничных точек влечет за собой соотношение $D(2)=D(1)$. Действительно, если $D(2)\neq D(1)$, то найдется точка $d\in D(2)$ и рациональное число α $(0<\alpha\leqslant 1)$ такие, что $d\in D(1+\alpha)\setminus \bigcup_{\varepsilon>0} D(1+\alpha-\varepsilon)=D(1)D(\alpha)\setminus \bigcup_{\varepsilon>0} D(1)D(\alpha-\varepsilon)$. Ясно, что $d=d_1d_2$, где $d_1\in D(1)$, $d_2\in D(\alpha)$. Ввиду отсутствия граничных точек найдется рациональное число ε $(0<\varepsilon\leqslant 1)$ такое, что $d_1\in D(1-\varepsilon)$, откуда $d=d_1d_2\in D(1+\alpha-\varepsilon)$ в противоречие с выбором d. Следовательно, $D(2)=D(1)^2=D(1)$.

Ввиду симметричности $D(1)$ последнее равенство означает, что $D(1)$ является подгруппой. Лемма доказана.

2.6. Пусть G — локально бикомпактная группа с первой аксиомой счетности. Фиксируем на ней левоинвариантную меру Хаара и рассмотрим линейное пространство $L_2(G)$ вещественных функций на G, квадрат которых интегрируем относительно этой меры (функции, совпадающие почти всюду, отождествляются). Для элементов φ, $\psi\in L_2(G)$ обычным образом вводится скалярное произведение $(\varphi, \psi)=\int_G \varphi(x)\psi(x)\,dx$ и норма $\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi, \varphi)}$. Как обычно, элемент $\varphi\in L_2(G)$ называется сильным пределом последовательности $\{\varphi_n\}$ элементов из $L_2(G)$, если $\lim_{n\to\infty}\|\varphi-\varphi_n\|=0$, и слабым пределом, если $\lim_{n\to\infty}(\varphi-\varphi_n, \psi)=0$ для любого $\psi\in L_2(G)$. Хорошо известно, что пространство $L_2(G)$ полно относительно сильной сходимости и является, таким образом, вещественным гильбертовым пространством.

2.7. Всякая сфера в пространстве $L_2(G)$ слабо компактна. Иначе говоря, из любой последовательности элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, нормы которых ограничены в совокупности, можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции из $L_2(G)$.

Действительно, обозначим через A замкнутую линейную оболочку элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, а через B — ортогональное дополнение A в $L_2(G)$. Пространство A является сепарабельным гильбертовым пространством. Ввиду самосопряженности гильбертова пространства и теоремы 3 § 24 из [16], некоторая подпоследовательность $\{\varphi_{n_i}\}$ элементов φ_i слабо сходится к элементу $\varphi\in A$. Произвольный элемент пространства $L_2(G)$ представляется в виде $\alpha+\beta$, где $\alpha\in A$, $\beta\in B$. Поэтому $\lim_{i\to\infty}(\varphi_{n_i}-\varphi, \alpha+\beta)=\lim_{i\to\infty}(\varphi_{n_i}-\varphi, \alpha)=0$, т. е. φ есть слабый предел последовательности $\{\varphi_{n_i}\}$ также и в пространстве $L_2(G)$.

2.8. Лемма 8. *Если последовательность $\{\psi_n\}$ слабо сходится к ψ, а последовательность $\{\varphi_n\}$ сильно сходится к φ, то $\lim_{n\to\infty}(\psi_n, \varphi_n)=(\psi, \varphi)$.*

Доказательство. $|(\psi_i, \varphi_i)-(\psi, \varphi)| \leqslant |(\psi_i, \varphi_i)-(\psi_i, \varphi)|+|(\psi_i, \varphi)-(\psi, \varphi)| \leqslant \|\psi_i\| \cdot \|\varphi_i-\varphi\|+|(\psi_i-\psi, \varphi)|$. Так как последовательность $\{\psi_i\}$ слабо сходящаяся, то нормы $\|\psi_i\|$ ограничены в совокупности ([16], § 24, теорема 1). Поэтому предел правой части последнего неравенства равен нулю, и лемма доказана.

2.9. С любым элементом g группы G ассоциируется унитарный оператор, отображающий $\varphi(x) \in L_2(G)$ на $\varphi(g^{-1}x)$. Условимся обозначать этот оператор той же буквой, что и соответствующий ему элемент: $g\varphi(x)=\varphi(g^{-1}x)$.

Известно ([14], стр. 52), что для всякого положительного числа ε и любой функции $\varphi \in L_2(G)$ найдется такая окрестность U единицы группы G, что из $g \in U$ следует $\|g\varphi-\varphi\|<\varepsilon$. Поэтому, если последовательность $\{g_n\}$ элементов из G сходится к элементу $g \in G$, то соответствующая последовательность $\{g_n\varphi\}$ сильно сходится к $g\varphi$.

2.10. Пусть теперь V — некоторая бикомпактная симметричная окрестность единицы в локально бикомпактной группе G, удовлетворяющей первой аксиоме счетности. Для любой V-последовательности бикомпактных множеств $\{D_n, n \in J\}$ (см. n° 2,3) мы введем вспомогательные функции $\Delta_n(x)$ $(n \in J)$, определенные по правилу:

$$\Delta_n(x)=\frac{3i}{n}, \quad \text{если} \quad x \in D_n^i \setminus D_n^{i-1} \qquad \left(1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{n}{3}\right]\right),$$
$$\Delta_n(e)=0,$$
$$\Delta_n(x)=1, \quad \text{если} \quad x \,\bar{\in}\, D_n^{\left[\frac{n}{3}\right]}.$$

Из этого определения следует, что функции $\Delta_n(x)$ удовлетворяют неравенству треугольника:

$$\Delta_n(xy) \leqslant \Delta_n(x)+\Delta_n(y) \qquad (n \in J;\ x, y \in G).$$

Ясно также, что $\Delta_n(x^{-1})=\Delta_n(x)$ $(x \in G,\ n \in J)$.

Далее, поскольку множества D_n^i бикомпактны и, следовательно, замкнуты в G, функции $\Delta_n(x)$ оказываются, очевидно, полунепрерывными сверху. Иначе говоря, каково бы ни было положительное число ε, элемент $x \in G$ и номер $n \in J$, имеем:

$$\Delta_n(x)-\Delta_n(y)<\varepsilon$$

для всех y, достаточно близких к x.

2.11. Для дальнейших построений необходимо предположить, что полугруппа Глисона рассмотренной в n° 2.10 V-последовательности $\{D_n\}$ обладает граничными точками. Фиксируем одну из таких точек p. Ввиду определения граничных точек (n° 2.4) в каждом из множеств D_n^n можно выделить элемент p_n так, чтобы последовательность $\{p_n\}$ сходилась к p.

Так как $p \,\bar{\in}\, D\left(\frac{2}{3}\right)=D\left(\frac{1}{3}\right)D\left(\frac{1}{3}\right)$, то $pD\left(\frac{1}{3}\right) \cap D\left(\frac{1}{3}\right)=\varnothing$. Но множества $pD\left(\frac{1}{3}\right)$ и $D\left(\frac{1}{3}\right)$ бикомпактны (n° 2.4), поэтому можно фиксировать открытую симметричную окрестность X единицы группы G

с бикомпактным замыканием $\overline{X}$ такую, что $X \subset V$ и

$$pD\left(\frac{1}{3}\right)\overline{X}^2 \cap D\left(\frac{1}{3}\right)\overline{X} = \varnothing. \tag{1}$$

Мы будем предполагать, кроме того, что мера бикомпактного множества $V\overline{X}$ не превосходит $^1/_2$. Этого всегда можно добиться с помощью изменения нормировки меры.

Ввиду полной регулярности группового пространства G можно фиксировать непрерывную функцию $\omega(x)$ со следующими свойствами:

$$\omega(e) = 1; \qquad 0 \leqslant \omega(x) \leqslant 1; \qquad \omega(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \bar{\in} X. \tag{2}$$

Введем теперь новые вспомогательные функции $\theta_n(x)$ по правилу

$$\theta_n(x) = \sup_{y \in G}(1 - \Delta_n(y))\,\omega(y^{-1}x) \quad (n \in J). \tag{3}$$

Из определения функций $\Delta_n(y)$ и $\omega(x)$ непосредственно следует, что:

$$\theta_n(x) \geqslant \omega(x) \qquad (x \in G) \tag{4}$$

$$0 \leqslant \theta_n(x) \leqslant 1, \quad \theta_n(e) = 1, \quad \theta_n(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \bar{\in} D_n^{\left[\frac{n}{3}\right]} X \subset VX. \tag{5}$$

2.12. Лемма 9. *Для любого элемента $u \in G$ и любого номера $n \in J$ $\| u\theta_n - \theta_n \| \leqslant \Delta_n(u)$ функции θ_n непрерывны и принадлежат $L_2(G)$.*

Доказательство. Так как функция ω непрерывна, а функция Δ_n полунепрерывна сверху, то для любого $\varepsilon > 0$ и любого элемента $x \in G$ множество Y_ε всех $y \in G$, для которых $(1 - \Delta_n(y))\,\omega(y^{-1}u^{-1}x) - \theta_n(u^{-1}x) \geqslant -\varepsilon$, замкнуто в G. Вместе с тем $\theta_n(u^{-1}x) = \sup\limits_{y \in G}(1 - \Delta_n(y))\,\omega(y^{-1}u^{-1}x)$, а $1 - \Delta_n(y) = 0$ для $y \bar{\in} V$. Поэтому бикомпактное множество $V \cap Y_\varepsilon$ непусто, и существует элемент z, содержащийся в пересечении $\bigcap\limits_{\varepsilon > 0}(V \cap Y_\varepsilon)$. Для этого элемента имеем, очевидно, $u\theta_n(x) = \theta_n(u^{-1}x) = (1 - \Delta_n(z))\,\omega(z^{-1}u^{-1}x)$. С другой стороны, по определению функций θ_n, $\theta_n(x) \geqslant (1 - \Delta_n(uz))\,\omega(z^{-1}u^{-1}x)$. Откуда $\theta_n(x) - u\theta_n(x) \geqslant (\Delta_n(z) - \Delta_n(uz))\omega(z^{-1}u^{-1}x)$. Но $\Delta_n(uz) \leqslant \Delta_n(u) + \Delta_n(z)$, $0 \leqslant \omega(z^{-1}u^{-1}x) \leqslant 1$, $\Delta_n(y) \geqslant 0$. Поэтому $\theta_n(x) - u\theta_n(x) \geqslant -\Delta_n(u)$ или $u\theta_n(x) - \theta_n(x) \leqslant \Delta_n(u)$. Заменяя x на uy, а u на v^{-1}, получим $\theta_n(y) - v\theta_n(y) \leqslant \Delta_n(v^{-1}) = \Delta_n(v)$. Так как y и v произвольны, то $\theta_n(x) - u\theta_n(x) \leqslant \Delta_n(u)$, и $u\theta_n(x) - \theta_n(x) \geqslant -\Delta_n(u)$. Вместе с полученным ранее это дает

$$| u\theta_n(x) - \theta_n(x) | \leqslant \Delta_n(u). \tag{6}$$

Ввиду определения функций Δ_n и V-последовательности $\{D_n\}$ (n° 2.3 и n° 2.10) неравенство (6) означает непрерывность функций θ_n. Обращаясь в нуль вне бикомпактного множества VX и будучи непрерывными, функции θ_n тем самым принадлежат $L_2(G)$. Ясно также, что функция $u\theta_n(x) - \theta_n(x)$ (u фиксировано) обращается в нуль вне бикомпактного множества $uV\overline{X} \cup V\overline{X}$, мера которого, согласно нашему предположению, не превосходит 1. Поэтому из (6) получаем $\| u\theta_n - \theta_n \| \leqslant \Delta_n(u)$, чем и заканчивается доказательство леммы.

2.13. Лемма 10. *Если m — фиксированное натуральное число, а последовательность $\{g_n\}$ элементов из G такова, что $g_n \in D_n^m$ $(n \in J)$, то из нее* *можно выделить подпоследовательность* $\{g_{ni}\}$, *для которой существует слабый предел последовательности* $n_i(g_{ni}\theta_{ni}-\theta_{ni})$.

Доказательство. Ввиду предыдущей леммы и определения функций Δ_n имеем:

$$\| n(g_n\theta_n-\theta_n)\| = n\| g_n\theta_n-\theta_n\| \leqslant n\Delta_n(g_n) \leqslant n\frac{3m}{n}=3m.$$

Справедливость утверждения леммы следует теперь из свойства слабой компактности сферы в $L_2(G)$ (см. n° 2.7).

2.14. Лемма 11. *Для любой* V*-последовательности бикомпактных множеств* D_n $(n\in J)$, *для которой подгруппа Глисона обладает граничными точками, можно фиксировать такую последовательность* $J_1\subset J$ *натуральных чисел и такую последовательность элементов* $d_n\in D_n$ $(n\in J_1)$, *что последовательность функций* $n(x_n\theta_n-\theta_n)$ $(n\in J_1)$ *слабо сходится к некоторой функции* $\xi\neq 0$ *из* $L_2(G)$.

Доказательство. Пусть p — граничная точка, а $\{p_n\}$ — сходящаяся к ней последовательность элементов $p_n\in D_n^n$, фиксированные в n° 2.11. Согласно лемме 9, $\| p_n\theta_n-\theta_n\| \leqslant \Delta_n(p_n)\leqslant 1$. Поэтому, ввиду свойства слабой компактности сферы в $L_2(G)$ (n° 2.7), можно считать, что последовательность $\{p_n\theta_n-p_n\}$ слабо сходится к некоторой функции ψ. Функция $p_n\theta_n(x)=\theta_n(p_n^{-1}x)$ обращается в нуль вне множества $p_nD_n^{\left[\frac{n}{3}\right]}X$, а функция $\omega(x)$ — вне множества X (n° 2.11). Ввиду соотношения (1) n° 2.11 это означает, что для достаточно больших n функция $\theta_n(p_n^{-1}x)\,\omega(x)$ есть тождественный нуль. Для таких n $(p_n\theta_n-\theta_n,\ \omega)=-(\theta_n,\ \omega)$. А так как $\theta_n(x)\geqslant\omega(x)$ (n° 2.11 (4)), то $(p_n\theta_n-\theta_n,\omega)\leqslant -\|\omega\|^2$ и $(\psi,\omega)\leqslant -\|\omega\|^2<0$. Таким образом, $\psi\neq 0$ и потому для достаточно больших n $(p_n\theta_n-\theta_n,\ \psi)>0$.

Положим $p_n=d_{n,1}d_{n,2}\ \ldots,\ d_{n,n}$, где $d_{n,j}\in D_n$, $q_n(j)=d_{n,1}\ \ldots\ d_{n,j}$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$ и $q(0)=e$. Тогда

$$0<(p_n\theta_n-\theta_n,\ \psi)=\sum_{j=0}^{n-1}(q_n(j)(d_{n,j+1}\theta_n-\theta_n),\ \psi). \tag{7}$$

Пусть $(q_n(j_0)(d_{n,\,j_0+1}\theta_n-\theta_n),\ \psi)$ — одно из слагаемых последней суммы, имеющих наибольшее значение. Тогда

$$0<(p_n\theta_n-\theta_n,\ \psi)\leqslant n\,(q_n(j_0)(d_{n,\,j_0+1}\theta_n-\theta_n),\ \psi). \tag{8}$$

Обозначая $d_{n,\,j_0+1}$ через d_n, получаем, используя лемму 9,

$$\| nq_n(j_0)(d_n\theta_n-\theta_n)\| = n\| d_n\theta_n-\theta_n\| \leqslant n\Delta_n(d_n)\leqslant n\cdot\frac{3}{n}=3.$$

Ввиду слабой компактности сферы в $L_2(G)$ (n° 2.7) найдется подпоследовательность функций $nq_n(j_0)(d_n\theta_n-\theta_n)$, имеющая слабый предел, который мы обозначим через ξ'. Переходя в неравенстве (8) к пределу, получим, что $(\xi',\ \psi)\geqslant(\psi,\ \psi)=\|\psi\|^2>0$, т. е. $\xi'\neq 0$.

Далее, поскольку элементы $q_n(j_0)$ содержатся в бикомпактном множестве V, можно, не нарушая общности, предполагать, что последовательность $\{q_n(j_0)\}$ сходится к некоторому пределу q. Ввиду леммы 10 найдется такая последовательность $J_1\subset J$ натуральных чисел, что последовательность функций $n(d_n\theta_n - \theta_n)$ слабо сходится к некоторому пределу $\xi \in L_2(G)$. Тогда для любого $\varphi \in L_2(G)$ $(\xi', \varphi) = \lim_{n\to\infty}(nq_n(j_0)(d_n\theta_n - \theta_n), \varphi) = \lim_{n\to\infty}(n(d_n\theta_n - \theta_n), q_n^{-1}(j_0)) = (\xi, q^{-1}\varphi) = (q\xi, \varphi)$ (см. n° 2.9 и лемму 8). Следовательно $\xi = q^{-1}\xi' \neq 0$. Лемма доказана.

2.15. Так как ξ есть слабый предел последовательности $n(d_n\theta_n - \theta_n)$, а функция $d_n\theta_n - \theta_n$ обращается в нуль вне множества $D_n D_n^{\left[\frac{n}{3}\right]} X$ (см. n° 2.11), то функция ξ обращается в нуль вне множества $D\left(\frac{1}{3}\right) X \subset V^2$.

§ 3. Апроксимация группами без малых подгрупп

Настоящий параграф посвящен усилению основной апроксимационной теоремы, доказанной Ямабе [9] непосредственно лишь для связного случая. Это усиление не является новым, поскольку оно вытекает из результатов Ямабе [9], [10] и Глисона [18] (см. также [12]). Переход от связного к общему случаю сравнительно прост и требует лишь небольших добавлений к методам Ямабе. Теорема 3 представляет собою легкое усиление (см. [19], лемма 2.9) известной теоремы Какутани — Кодаира.

3.1. Теорема 3. *Если локально бикомпактная группа G порождается бикомпактным подмножеством B своих элементов, то в любой окрестности U ее единицы найдется бикомпактный нормальный делитель, фактор-группа по которому удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Построим последовательность бикомпактных окрестностей U_i единицы группы G, содержащихся в U и таких, что $U_{i+1}U_{i+1}^{-1} \subset U_i$, $b^{-1}U_{i+1}b \subset U_i$ для любого $b \in B$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Бикомпактное множество $A = \bigcap_i U_i$ содержится в U и удовлетворяет условиям $AA^{-1} \subset A$ и $b^{-1}Ab \subset A$ для любого $b \in B$. Так как B порождает G, то A является бикомпактным нормальным делителем группы G, содержащимся в $U_1 \subset U$. Покажем, что множества $U_i' = U_iA/A$ составляют полную систему окрестностей единицы в $G' = G/A$. Действительно, пусть W' — любая открытая окрестность единицы в G'. Множество S' всех элементов из U_1', не содержащихся в W', бикомпактно и не содержит единицы. Поэтому пересечение множеств S' и $\bigcap_i U_i'$ пусто. Так как $U_1' \supseteq U_2' \supseteq \ldots$, то ввиду известного свойства бикомпактных множеств, найдется такой номер n, что пересечение $U_n' \cap S'$ пусто, т. е., что $U_n' \subset W'$. Тем самым доказано, что система окрестностей единицы $\{U_i';\ i = 1, 2, \ldots\}$ полная и, следовательно, группа G удовлетворяет первой аксиоме счетности. Бикомпактное множество $BA/R = B'$ удовлетворяет второй аксиоме счетности (лемма 6) и порождает группу G'. Поэтому как B', так и G' обладают счетными всюду плотными подмножествами. Но тогда G' удовлетворяет, очевидно, второй аксиоме счетности. Теорема доказана.

3.2. Следствие 1. *Если связная компонента K единицы локально бикомпактной группы G определяет бикомпактную фактор-группу G/K, то в любой окрестности единицы группы G найдется бикомпактный* *нормальный делитель, фактор-группа по которому удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Подгруппа D, порожденная любой бикомпактной окрестностью U единицы, открыта в G. Пространство G/D, будучи дискретным и бикомпактным, конечно. Поэтому группа G порождается объединением множества U и некоторого конечного множества, т. е. бикомпактным множеством. Поэтому применима теорема 3.

3.3. Следствие 2. *Если локально бикомпактная группа G имеет окрестность единицы, не содержащую нетривиальных (отличных от единичной) подгрупп, то она удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Доказательство. Открытая подгруппа, порожденная любой бикомпактной окрестностью единицы, удовлетворяет, согласно теореме 3, второй аксиоме счетности. Следовательно, G удовлетворяет первой аксиоме счетности.

3.4. Лемма 12. *Пусть G — локально бикомпактная группа с первой аксиомой счетности, V — некоторая симметричная бикомпактная окрестность ее единицы. Тогда существует такая бикомпактная подгруппа $B \subseteq V$ и такая окрестность $U \subseteq V$ единицы группы G, что любая подгруппа, содержащаяся в U, содержится в B.*

Доказательство. В группе G существует счетная полная система окрестностей единицы $\{V_\alpha\}$, состоящая из бикомпактных и симметричных множеств. Через S_α обозначим множество всех элементов $x \in y$ таких, что $x^m \in V_\alpha$ для любого целого показателя m, а через T_α — минимальную замкнутую подгруппу, содержащую S_α ($\alpha = 1, 2, \ldots$). Ясно, что множества S_α бикомпактны и симметричны.

Лемма будет, очевидно, доказана, если показать, что для достаточно больших α $T_\alpha \subseteq V$. Предположим противное. Тогда для любого $\alpha = 1, 2, \ldots$ найдется натуральное число $n = n(\alpha)$ такое, что $S_\alpha^{n(\alpha)} \subseteq V$, $S_\alpha^{n(\alpha)+1} \not\subseteq V$. Обозначая S_α через D_n (и оставляя для каждого номера n не более одного представителя D_n), придем, очевидно, к некоторой V-последовательности $\{D_n;\ n \in J\}$ бикомпактных множеств. Пусть $D(s)$ — полугруппа Глисона этой V-последовательности. Если $D(s)$ не имеет граничных точек, то $D(1)$ есть подгруппа (лемма 7), причем, очевидно, бикомпактная. Хорошо известно, что всякая бикомпактная группа является проективно-лиевой ([13], теорема 67). Тогда, на основании теоремы 2, найдется открытая окрестность W единицы группы G, имеющая бикомпактное замыкание $\overline{W}$ и такая, что $D(1) \cap W$ разлагается в прямое произведение бикомпактной группы N и некоторой локальной группы Ли L (быть может, тривиальной). Ясно, что $D(1) \cap W$, а значит, и W можно считать симметричными множествами. Найдется натуральное число $m = m(n) \leqslant n$ такое, что $D_n^m \subseteq \overline{W}$, $D_n^{m+1} \not\subseteq \overline{W}$. Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно, как и выше (n° 2,4), предполагать, что для всех неотрицательных рациональных чисел s существует пределы $\lim\limits_{n\to\infty} D_n^{[sm]} = D'(s)$. Как и выше (n° 2.4), получим, что множество $D'(1)$ бикомпактно и имеет нетривиальное пересечение с границей окрестности $\overline{W}$. Ясно, что $D(1) \cap \overline{W} = N \times \overline{L}$

(где $\bar{L}$ — замыкание L в G) и что окрестность W может быть выбрана так, чтобы множество $\bar{L}$ не содержало нетривиальных подгрупп. В таком случае $D'(1)$ не может быть подгруппой, ибо иначе из $D'(1) \subset D(1) \cap \bar{W} = N \times \bar{L}$ и отсутствия подгрупп в $\bar{L}$ вытекало бы, что $D'(1) \subset N \subset W$, в противоречие с нетривиальностью пересечения $D'(1) \cap (\bar{W} \setminus W)$. Но тогда, используя лемму 7 и заменяя в случае необходимости V на $\bar{W}$, можно предполагать, что рассматриваемая нами полугруппа Глисона $D(s)$ имеет граничные точки. Это обстоятельство позволяет использовать аппарат предыдущего параграфа, в частности вспомогательные функции θ_n (n° 2.11), последовательность $\{d_n\}$ и функцию ξ (лемма 11).

Рассмотрим величину $\Gamma_n = (d_n^n\theta_n - \theta_n, \xi)$. С одной стороны, $\Gamma_n = (d_n^n\theta, \xi) - (\theta_n, \xi) = (\theta_n, d_n^{-n}\xi) - (\theta_n, \xi) = (\theta_n, d_n^{-n}\xi - \xi) \leqslant \|\theta_n\| \cdot \|d_n^{-n}\xi - \xi\|$. Так как $d_n \in D_n = S_\alpha$, то, по определению S_α, $d_n^{-n} \in V_\alpha$, откуда $d_n^{-n} \to e$ при $n \to \infty$. Но тогда $\|d_n^{-n}\xi - \xi\| \to 0$ при $n \to \infty$ (см. n° 2.9). Далее, функции θ_n обращаются в нуль вне множества $V\bar{X}$ меры 1 и по модулю не превосходят 1. Поэтому $\|\theta_n\| \leqslant 1$, и из неравенства $\Gamma_n \leqslant \|\theta_n\| \cdot \|d_n^{-n}\xi - \xi\|$ вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n = 0. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$\Gamma_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} d_n^k (d_n\theta_n - \theta_n),\ \xi\right) = \left(n(d_n\theta_n - \theta_n),\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} d_n^{-k}\xi\right) =$$

$$= (n(d_n\theta_n - \theta_n), \xi) + \left(n(d_n\theta_n - \theta_n),\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(d_n^{-k}\xi - \xi)\right). \tag{2}$$

Не нарушая общности, можно считать, что ξ есть слабый предел последовательности $\{n(d_n\theta_n - \theta_n)\}$ (лемма 11). Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (n(d_n\theta_n - \theta_n), \xi) = \|\xi\|^2. \tag{3}$$

Вместе с тем $d_n^{-k} \in V_\alpha$ для любого k. Поэтому $\|d_n^{-k}\xi - \xi\|$ стремится к нулю равномерно по k при $n \to \infty$ (n° 2.9) и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(d_n^{-k}\xi - \xi)\right\| = 0.$$

По лемме 8 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n(d_n\theta_n - \theta_n),\ \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(d_n^{-k}\xi - \xi)\right) = 0$. Но тогда из (2) и (3) получаем: $\lim\limits_{n\to\infty}\Gamma_n = \|\xi\|^2 \neq 0$ в противоречие с (1). Лемма доказана.

3.5. Теорема 4. *Если связная компонента K единицы локально бикомпактной группы G определяет бикомпактную фактор-группу G/K, то в любой окрестности единицы группы G найдется такой бикомпактный нормальный делитель A, что группа G/A имеет окрестность единицы, не содержащую нетривиальных подгрупп.*

Доказательство. Ввиду следствия 1 теоремы 3 можно, не нарушая общности, считать, что группа G удовлетворяет второй аксиоме счетности. Рассмотрим произвольную симметричную бикомпактную окрестность V единицы группы G. По лемме 12, существует окрестность единицы $U \subset V$ и бикомпактная подгруппа $B \subset V$ такие, что B содержит любую подгруппу из U. Переходя в случае необходимости к меньшей окрестности, можно предполагать, что окрестность U открыта, а пересечение $U \cap B$ разлагается в прямое произведение некоторой бикомпактной группы C и локальной группы Ли L, не содержащей нетривиальных подгрупп (теорема 2). Найдется такая окрестность W единицы группы G, что $W^{-1}CW \subset U$. В частности, для любого $w \in W$ $w^{-1}Cw \subset U$ и ввиду выбора B и U $w^{-1}Cw \subset B \cap U = C \times L$. Так как L не содержит нетривиальных подгрупп, то $w^{-1}Cw \subset C$. Это соотношение показывает, что нормализатор N подгруппы C в G содержит W и является поэтому открытой подгруппой. Следовательно, $N \supset K$, а пространство G/N, будучи бикомпактным и дискретным, конечно. Фиксируем полную систему представителей $g_1, g_2, \ldots, g_m$ смежных классов G по N. По построению, любая подгруппа, содержащаяся в U, содержится в $B \cap U$, а, значит, и в C. Следовательно, в группе N/C имеется окрестность единицы $U' = (U \cap N)C/C$, не содержащая нетривиальных подгрупп. Короче, N/C есть группа без малых подгрупп (см. 3.6). Введем обозначения $N_i = g_i^{-1}Ng_i$, $S = \bigcap_{i=1}^{m} N_i$, $C_i = g_iCg_i$, $A = \bigcap_{i=1}^{m} C_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Подгруппа S, очевидно, открыта, а подгруппа A бикомпактна и инвариантна в G. Ясно также, что C_i — нормальный делитель в N_i, а N_i/C_i есть группа без малых подгрупп $(i = 1, \ldots, m)$. Группа S/A допускает непрерывный взаимно однозначный гомоморфизм в прямое произведение групп N_i/C_i и потому также не имеет малых подгрупп. Поскольку подгруппа S/A открыта в G/A, то G/A имеет окрестность единицы, не содержащую нетривиальных подгрупп. Теорема доказана.

3.6. Определение. Топологическая группа называется *группой без малых подгрупп*, если она имеет окрестность единицы, не содержащую никаких подгрупп, за исключением единичной.

Теорема 4 показывает, что группы без малых подгрупп играют исключительно важную роль в общей теории локально бикомпактных групп. Поэтому мы переходим теперь к изучению локально бикомпактных групп без малых подгрупп.

§ 4. Группы без малых подгрупп

Настоящий параграф посвящен построению канонического линейного представления локально бикомпактной группы без малых подгрупп. Идея такого построения принадлежит Глисону [7], более детальная разработка рассматриваемого (общего) случая сделана Ямабе [10]. Предлагаемое изложение несколько отличается (особенно в конце) от изложения Ямабе. Внесенные изменения имеют целью сделать построение более наглядным. Учтено, в частности, одно упрощение, предложенное в [12]. Устранены также некоторые пробелы и неточности, имеющиеся в изложении Ямабе.

4.1. На протяжении всего настоящего параграфа будут употребляться следующие обозначения:

1) G — недискретная локально бикомпактная группа без малых подгрупп, e — ее единица. Ввиду следствия 2 теоремы 3 группа G удовлетворяет первой аксиоме счетности.

2) V_1 — симметричная бикомпактная окрестность единицы в G, не содержащая нетривиальных подгрупп.

3) V — симметричная бикомпактная окрестность единицы в G такая, что $Vg^{-1}VgV^2 \subset V_1$ для любого $g \in V_1$.

4) Q_α — множество всех элементов $x \in G$, для которых

$$x, x^2, \ldots, x^\alpha \in G \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

5) $n = n(\alpha)$ натуральное число, для которого $Q_\alpha^n \subset V$, $Q_\alpha^{n+1} \not\subset V$ (существование такого n вытекает из недискретности G и отсутствия нетривиальных подгрупп в G).

6) $D_n = D_{n(\alpha)}$ — одно из множеств Q_α, для которых $n = n(\alpha)$ (n пробегает некоторое множество J натуральных чисел). Предполагается, что для каждого $n \in J$ фиксировано одно и только одно множество $D_n = Q_\alpha$.

7) Квадратные скобки означают всегда целую часть числа, заключенного в скобки.

4.2. Ясно, что каждое из множеств Q_α бикомпактно.

Пересечение всех Q_α содержит лишь единицу, ибо элементы, содержащиеся в таком пересечении, должны, по определению множеств Q_α, порождать циклические подгруппы, содержащиеся в V. Ясно также, что $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \ldots$ Поэтому для любой окрестности $U \subset V$ единицы группы G найдется такой номер α_0, что $Q_\alpha \subset U$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$, ибо иначе в G существовала бы убывающая последовательность непустых бикомпактных множеств $Q_\alpha \cap (V \setminus U)$ с пустым пересечением, что, как известно, невозможно. Это обстоятельство показывает, что $n(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to \infty$. В частности, множество J (n° 4.1, 6)) бесконечно. Кроме того, любая окрестность единицы содержит почти все Q_α, а, значит, и почти все D_n.

Из определения D_n непосредственно следует, что $D_n^n \subset V$, $D_n^{n+1} \not\subset V$, $D_n^{-1} = D_n$ и $e \in D_n$. Таким образом $\{D_n;\ n \in J\}$ есть V-последовательность бикомпактных множеств в смысле определения 2.3. Как и выше (§ 2), через $D(s)$ мы будем обозначать полугруппу Глисона этой V-последовательности.

4.3. Множество $D(1)$ содержит элементы, отличные от e (n° 2.4) и содержится в V (n° 2.4). Из леммы 7 и отсутствия подгрупп в V следует теперь, что полугруппа $D(s)$ обладает граничными точками. Это обстоятельство позволяет использовать в рассматриваемом случае аппарат, построенный в § 2. В частности, на протяжении всего настоящего параграфа будут употребляться (без дальнейших ссылок) функции Δ_n, θ_n, ω, ξ, определенные в n° 2.10, n° 2.11 и лемме 11. Свойства этих функций, установленные в § 2 в случае произвольной полугруппы Глисона, обладающей граничными точками, будут, разумеется, справедливы и в рассматриваемом случае.

4.4. Лемма 13. *Из любой сходящейся к единице последовательности* $\{x_n\}$ *элементов группы* G *такой, что* $x_i, x_i^2, \ldots, x_i^{n_i} \in V$ $(i=1, 2, \ldots)$, *можно выделить подпоследовательность, для которой при любом вещественном* r *существует предел* $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^{[n_i r]} = x(r)$. *При этом* $x(r)$ *является (вещественной) однопараметрической подгруппой и* $x(r) \in V$ *для всех* r *с* $|r| \leqslant 1$.

Доказательство. Для любого вещественного числа r последовательность $\{x_i^{[n_i r]}\}$ содержится в бикомпактном множестве $V^{[r]+1}$, поэтому множество $M(r)$ предельных точек этой последовательности не пусто. Используя в случае необходимости переход к подпоследовательностям и диагональный процесс, можно считать последовательность $\{x_i\}$ такой, что для любого рационального числа s множество $M(s)$ состоит точно из одного элемента, который мы обозначим через $x(s)$. Иначе говоря, для любого рационального числа s существует предел $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^{[n_i s]} = x(s)$. Так как $x_i^{[n_i(s_1+s_2)]} = x_i^{[n_i s_1]} x_i^{[n_i s_2]} x_i^{\delta_i}$ (где $\delta_i = 1$ или 0), а $x_i \to e$, то $x(s_1)\,x(s_2) = x(s_1+s_2)$ для любой пары рациональных чисел s_1, s_2. Отображение x: $s \to x(s)$ аддитивной группы рациональных чисел в группу G является, таким образом, гомоморфизмом. Справедливо следующее свойство, которое мы обозначим через (C): для любой окрестности U единицы группы G найдется такое положительное число ε, что $M(r) \subset U$ при $|r| < \varepsilon$ (r — вещественные числа).

Действительно, если бы свойство (C) не имело места, то нашлась бы такая сходящаяся к нулю последовательность $\{r_i\}$ вещественных чисел, что последовательность $x_i^{[n_i r_i]}$ имела бы предельную точку $y \in V$, отличную от e. Для любого натурального числа m $y^m \in V$, ибо для достаточно больших i $[r_i m] < 1$ и, значит, $x_i^{[n_i r_i]\,m} \in V$. Поскольку это противоречит отсутствию нетривиальных подгрупп в V, свойство (C) доказано. Свойство (C) показывает, что построенный выше гомоморфизм x непрерывен. Это позволяет в свою очередь продолжить (и притом единственным способом) гомоморфизм x до непрерывного гомоморфизма аддитивной группы вещественных чисел в группу G. Обозная продолженный гомоморфизм также через x, получаем вещественную однопараметрическую подгруппу $x(r)$. Из построения ясно, что $x(r) \in V$ при $|r| \leqslant 1$. Остается показать, что для любого вещественного числа r предел $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^{[n_i r]}$ существует и равен $x(r)$ или, иначе говоря, что множество $M(r)$ состоит из одной точки $x(r)$.

Пусть z — любая точка из $M(r)$. Существует подпоследовательность $\{x_j^{[n_j r]}\}$, сходящаяся к z. Выберем какую-нибудь последовательность $\{s_k\}$ рациональных чисел, сходящуюся к r. Применяя свойство (C) к соотношениям $x_j^{[n_j r]} = x_j^{[n_j s_k]}\, x_j^{[n_j(r-s_k)]}\, x_j^{\delta_j}$ (где $\delta_j = 0$ или 1, k и j — натуральные числа), получим, что для любой окрестности U единицы группы G существует такой номер $k = k(U)$ и такой номер j_0, что $x_j^{[n_j r]} = x_j^{[n_j s_k]}\,U$ при всех $j \geqslant j_0$. Устремляя j к ∞, найдем, что $z \in x(s_k)\,U$. Ввиду произвольности окрестности U z является предельной точкой последовательности $\{x(s_k)\}$, т. е. совпадает с $x(r)$. Лемма доказана.

Следствие. *Любая недискретная локально бикомпактная группа G без малых подгрупп имеет нетривиальную однопараметрическую подгруппу.*

Доказательство. В условии леммы 13 показатели n_i выберем так, чтобы $x_i^{n_i} \in V$, $x_i^{n_i+1} \bar{\in} V$. Это можно сделать ввиду отсутствия нетривиальных подгрупп в V (предполагается, что $x_i \neq e$ $i=1, 2, \ldots$), тогда однопараметрическая подгруппа $x(r)$, построенная в лемме 13, нетривиально пересекается с границей окрестности V и потому содержит элементы, отличные от e.

4.5. Лемма 14. *Если $x, y \in V$ и $x^2 = y^2$, то $x = y$.*

Доказательство. Обозначим $x^{-1}y$ через a. Легко проверить, что $x^{-1}a^{-1}x = a$, а потому $x^{-1}a^{-m}x = a^m$ и $x^{-1}a^{-m}xa^m = a^{2m}$. Предположим, что для всех $m \leqslant n$ $a^m \in V_1$ (см. 4.1). Тогда $a^{2m+1} = x^{-1}a^{-m}xa^m a \in Va^{-m}Ua^m V^2 \subset V_1$ (см. 4.1, 3)) и $a^{2m} \in Va^{-m}Va^m \in V_1$. Проводя индукцию, получим, что для всех целых чисел m $a^m \in V_1$. Так как V_1 не содержит нетривиальных подгрупп, то $a = e$ и $x = y$, что и требовалось доказать.

4.6. Лемма 15. *Существует натуральное число k такое, что $kn(\alpha) \geqslant \alpha$ для достаточно больших α.*

Доказательство. Пусть $\{d_n\}$ — последовательность элементов, а ξ — функция, определенные в лемме 11. Найдется такое $\gamma > 0$, что

$$\| d_n^m \xi - \xi \| \leqslant \frac{1}{2} \| \xi \| \neq 0 \quad \text{при} \quad m \leqslant \gamma n. \tag{1}$$

Действительно, в противном случае найдется последовательность элементов $y_n \in D_n$ и последовательность натуральных чисел $m(n)$ такие, что $y_n^{m(n)}$ не содержится в некоторой фиксированной окрестности единицы $U (n \in J)$, а $\frac{m(n)}{n} \to 0$ (см. n° 2.9). Но тогда, поскольку последовательность $\{y_n^{m(n)}\}$ содержится в V, найдется предельная точка y этой последовательности, отличная от e. Для любого натурального числа q $qm(n) < n$, начиная с некоторого n. Поэтому $y^q \in V$, в противоречие с отсутствием нетривиальных подгрупп в V. Тем самым доказано существование γ, для которого справедливо (1).

Рассмотрим величину

$$\Gamma_n = \left(d_n^{[\gamma n]} \theta_n - \theta_n, \; \xi \right) = \left(\sum_{i=0}^{[\gamma n]-1} d_n^i (d_n \theta_n - \theta_n), \; \xi \right) =$$

$$= [\gamma n] \left(d_n \theta_n - \theta_n, \frac{1}{[\gamma n]} \sum_{i=0}^{[\gamma n]-1} d_n^{-i} \xi \right)$$

или

$$\Gamma_n = \frac{[\gamma n]}{n} (n (d_n \theta_n - \theta_n), \xi) + \frac{[\gamma n]}{n} \left(n (d_n \theta_n - \theta_n), \frac{1}{[\gamma n]} \sum_{i=0}^{[\gamma n]-1} (d_n^{-i} \xi - \xi) \right).$$

Ясно, что предел первого члена в правой части равен $\gamma \| \xi \|^2$ (см. лемму 11), а верхний предел второго члена, ввиду лемм 11, 8 и соотношения (1), не превосходит $\frac{1}{2}\gamma\,\|\xi\|^2$. Отсюда следует, что нижний предел Γ_n при $n\to\infty$ положителен $\left(\geqslant\frac{1}{2}\gamma\,\|\xi\|^2\right)$. Но

$$|\Gamma_n|\leqslant\|d_n^{[\gamma n]}\theta_n-\theta_n\|\cdot\|\xi\|\leqslant\Delta_n(d_n^{[\gamma n]})\,\|\xi\|$$

(см. лемму 9). Используя определение функций Δ_n (n° 2.10), получаем, что последовательность $\{d_n^{[\gamma n]}\}$ не имеет e своей предельной точкой. Вместе с тем эта последовательность содержится в V и обладает, следовательно, предельной точкой $d\neq e$. Переходя, если понадобится, к подпоследовательности, можно предполагать, что $\lim\limits_{n\to\infty} d_n^{[\gamma n]}=d$. Поскольку V не имеет нетривиальных подгрупп, найдется такое натуральное число h, что $d^h\,\overline{\in}\,V$. Но тогда для достаточно больших n $d_n^{h[\gamma n]}\,\overline{\in}\,V$. Так как $d_n\in D_{n(\alpha)}=Q_\alpha$, это означает, что $h[\gamma n(\alpha)]\geqslant\alpha$. Полагая $k=h([\gamma]+1)$, завершим доказательство леммы[1].

4.7. Лемма 16. *Каждой окрестности единицы $U\subset V$ можно сопоставить окрестность единицы U^* и натуральное число α такие, что для любых элементов $x, a\in G$ из $x, x^2, \ldots, x^\alpha\in V$, $a, a^2, \ldots, a^\alpha\in V$, $x^\alpha a^{-\alpha}\in U^*$ вытекают включения $x^k a^{-k}\in U$ для всех $k=1, 2, \ldots, \alpha$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда существуют две последовательности элементов $\{a_\alpha\}$, $\{x_\alpha\}$ и последовательность натуральных чисел $j(\alpha)\leqslant\alpha$ такие, что $x_\alpha^\alpha a_\alpha^{-\alpha}\to e$, а $x_\alpha^{j(\alpha)}a_\alpha^{-j(\alpha)}\,\overline{\in}\,U$ при всех $\alpha=1, 2, \ldots$ Можно считать, очевидно, что $x_\alpha^{j(\alpha)}a_\alpha^{-j(\alpha)}\to\bar{x}\in V\setminus U$. Ясно, что $\bar{x}\neq e$. Если $\frac{j(\alpha)}{\alpha}\to 0$, то для любой предельной точки $\bar{a}$ множества $\{a_\alpha^{-j(\alpha)}\}$ $\bar{a}^{-k}\in V$ при всех $k=1, 2, \ldots$. Поэтому $\bar{a}=e$ и, следовательно, $a_\alpha^{-j(\alpha)}\to e$. По той же причине $x_\alpha^{-j(\alpha)}\to e$. Но тогда $\bar{x}=e$, вопреки предположению. Если $\frac{j(\alpha)}{\alpha}$ не сходится к нулю, то можно предполагать, что $\frac{j(\alpha)}{\alpha}\to r$ $(0<r\leqslant 1)$. Можно предполагать также, что для любого $h=1, 2, \ldots$ существуют пределы $y_h=\lim\limits_{\alpha\to\infty}x_\alpha^{[2^{-h}\alpha]}$ и $b_h=\lim\limits_{\alpha\to\infty}a_\alpha^{[2^{-h}\alpha]}$. По построению, $y_h, b_h\in V$ $(h=1, 2, \ldots)$ и $y_1^2=b_1^2$. Но тогда, ввиду леммы 14, $y_h=b_h$ при всех $h=1, 2, \ldots$ Далее, для любого $\delta>0$ найдется такое натуральное число m, что $|r-2^{-h}m|<\delta$. Тогда $x_\alpha^{j(\alpha)}a_\alpha^{-j(\alpha)}=x_\alpha^{d(\alpha)}x_\alpha^{[2^{-h}m\alpha]}a_\alpha^{-[2^{-h}m\alpha]}a_\alpha^{-d(\alpha)}$, где $d(\alpha)=j(\alpha)-[2^{-h}m\alpha]$. Ясно, что $x_\alpha^{[2^{-h}m\alpha]}a_\alpha^{-[2^{-h}m\alpha]}\to y_h^m b_h^m=e$. Рассуждения, проведенные выше $\left(\text{для случая } \frac{j(\alpha)}{\alpha}\to 0\right)$, показывают, что для достаточно малого δ предельные точки последовательностей $\{x_\alpha^{d(\alpha)}\}$ и $\{a_\alpha^{-d(\alpha)}\}$ содержатся в любой наперед заданной окрестности единицы. Поэтому $x_\alpha^{j(\alpha)}a_\alpha^{-j(\alpha)}\to e$, вопреки исходному построению. Лемма доказана.

---

[1]) Как видно из доказательства, справедливость утверждения леммы требует, вообще говоря, замены последовательности J (n° 4.1, 6)) некоторой ее подпоследовательностью. Ясно, что такая замена не отразится на правильности ранее полученных результатов.

4.8. Лемма 17. *Пусть $x(r)$ — однопараметрическая подгруппа в G, A_n — оператор $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x\left(\frac{i}{n}\right)$. Тогда для любой функции $\varphi \in L_2(G)$ последовательность $\{A_n\varphi\}$ строго сходится к некоторому элементу $A\varphi \in L_2(G)$.*

Доказательство. Ввиду n° 2.9, множество $U_\varphi(\varepsilon)$ всех элементов $x \in G$, для которых $\|x\varphi - \varphi\| \leqslant \varepsilon$, образует замкнутую окрестность единицы. Пусть m и n — настолько большие целые числа, что $x\left(\frac{i}{mn}\right) \in U_\varphi(\varepsilon)$ для всех i между 1 и $\max(m, n)$. Тогда

$$A_{mn}\varphi - A_n\varphi = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x\left(\frac{i}{n}\right)\left\{\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left(x\left(\frac{j}{mn}\right)\varphi - \varphi\right)\right\}.$$

Но $\left\|x\left(\frac{j}{mn}\right)\varphi - \varphi\right\| \leqslant \varepsilon$. Поэтому $\left\|\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left(x\left(\frac{j}{mn}\right)\varphi - \varphi\right)\right\| \leqslant \varepsilon$ и $\|A_{mn}\varphi - A_n\varphi\| \leqslant \varepsilon$.

Подобным же образом покажем, что $\|A_{mn}\varphi - A_m\varphi\| \leqslant \varepsilon$, откуда $\|A_m\varphi - A_n\varphi\| \leqslant 2\varepsilon$. Иначе говоря, функции $A_m\varphi$ образуют фундаментальную последовательность и, следовательно, сходятся к некоторому элементу $A\varphi \in L_2(G)$, что и требовалось доказать.

4.9. Ввиду леммы 17 каждая однопараметрическая подгруппа $x(t) \in G$ определяет некоторый оператор, переводящий $L_2(G)$ в $L_2(G)$. Следуя Глисону, введем для этого оператора обозначение $A = \int_0^1 x(t)\,dt$. Из определения оператора A и n° 2.3 вытекает, что для любой функции $\varphi \in L_2(G$ сильный предел $\lim_{r\to 0}\int_0^1 x(rt)\,dt\varphi$ существует и равен φ.

4.10. Ввиду n° 2.11, (5), норма определенных в этом пункте функций θ_n не превосходит меры множества VX, т. е. $\leqslant 1$. Поэтому переходя, если понадобится, к подпоследовательности и используя свойство слабой компактности сферы в $L_2(G)$ (n° 2.7), можно считать, что последовательность $\{\theta_n\}$ слабо сходится к некоторой функции $\theta \in L_2(G)$. Ясно, что последовательность $\{x_n\theta_n\}$ слабо сходится к $x\theta$, если $x_n \to x$ ($x_n \in G$, $n = 1, 2, \ldots$).

4.11. Лемма 18. *Если $x\theta = \theta$, то $x = e$.*

Доказательство. Ввиду n° 2.11 (4) $(\theta_n, \omega) \geqslant \|\omega\|^2 > 0$. Но тогда и $(\theta, \omega) \geqslant \|\omega\|^2 > 0$, так что $\theta \neq 0$. Вместе с тем, поскольку все θ_n обращаются в нуль вне множества $VX \subset V^2$ (n° 2.11, (5)), то и θ обращается в нуль вне множества V^2. Поэтому, если $g \bar{\in} V^4$, то $g\theta \neq \theta$. Но из $x\theta = \theta$ следует, что $x^n\theta = \theta$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $x^n \in V^4 \subset V_1$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ Ввиду отсутствия в V_1 нетривиальных подгрупп, получаем, что $x = e$. Лемма доказана.

4.12. Лемма 19. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две последовательности элементов, сходящиеся к e, а $\{\nu(n)\}$ и $\{\rho(n)\}$ — две последовательности натуральных чисел такие, что обе последовательности $\{x_n^{\nu(n)}\}$ и $\{y_n^{\rho(n)}\}$ сходятся к одному* *и тому же элементу* x; $x_n, x_n^2, \ldots, x_n^{\nu(n)} \in V$ *и* $y_n, y_n^2, \ldots, y_n^{\rho(n)} \in V$ *для любого* n, *а последовательности* $\{\nu(n)(x_n\theta_n - \theta_n)\}$, $\{\rho(n)(y_n\theta_n - \theta_n)\}$ *имеют соответственно слабые пределы* τ *и* τ'. *Тогда* $\tau = \tau'$.

Доказательство. Переходя к последовательностям, можно, ввиду леммы 13, считать, что существуют однопараметрические подгруппы $x(r)$ и $y(r)$ такие, что для любого вещественного числа r $x(r) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{[r\nu(n)]}$, $y(r) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n^{[r\rho(n)]}$. Ясно, что $x(r) \in V$ и $y(r) \in V$ при $|r| \leqslant 1$ и что $x(1) = x = y(1)$. Ввиду леммы 14 $x(2^{-k}m) = y(2^{-k}m)$ для любых целых m и k и, по непрерывности, $x(r) = y(r)$ при любом r. Для произвольной функции $\varphi(x) \in L_2(G)$ имеем в виду 4.10:

$$(x(r)\theta - \theta, \varphi) = \lim_{n\to\infty} (x_n^{[r\nu(n)]}\theta_n - \theta_n, \varphi) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [r\nu(n)] \left(x_n\theta_n - \theta_n, \frac{1}{[r\nu(n)]} \sum_{i=0}^{[r\nu(n)]-1} x_n^{-i}\varphi \right). \tag{1}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ множество $U_\varphi(\varepsilon)$ всех $x \in G$, для которых $\|x\varphi - \varphi\| \leqslant \varepsilon$, составляет замкнутую окрестность единицы в G (см. n° 2.9). Обозначим через $U_\varphi(\varepsilon)^*$ окрестность, соответствующую окрестности $U_\varphi(\varepsilon)$ в смысле леммы 16. Для больших n $x_n^{-\nu(n)} x \in U_\varphi(\varepsilon)^*$. Тогда в силу леммы 16 $x_n^{-i} x\left(\frac{i}{\nu(n)}\right) \in U_\varphi(\varepsilon)$ или, что то же самое, $\left\| x\left(\frac{i}{\nu(n)}\right)\varphi - x_n^i\varphi \right\| \leqslant \varepsilon$ для любого i между 1 и $\nu(n)$. Следовательно, $\left\| \frac{1}{[r\nu(n)]} \sum\limits_{i=0}^{[r\nu(n)]-1} \left(x\left(\frac{i}{\nu(n)}\right)\varphi - x_n^i\varphi \right) \right\| \leqslant \varepsilon$ для любого вещественного r между 0 и 1. С другой стороны, по лемме 17, $\frac{1}{[r\nu(n)]} \sum\limits_{i=0}^{[r\nu(n)]-1} x\left(-\frac{i}{\nu(n)}\right)\varphi$ сильно сходится к $\int\limits_0^1 x(-rt)\,dt\,\varphi$. Но тогда и $\frac{1}{[r\nu(n)]} \sum\limits_{i=0}^{[r\nu(n)]-1} x_n^{-i}$ сильно сходится к $\int\limits_0^1 x(-rt)\,dt\,\varphi$. Поэтому, в силу (1) и леммы 8, имеем:

$$(x(r)\theta - \theta, \varphi) = \left(r\tau, \int_0^1 x(-rt)\,dt\,\varphi \right). \tag{2}$$

Аналогично $(y(r)\theta - \theta, \varphi) = \left(r\tau', \int\limits_0^1 y(-rt)\,dt\,\varphi \right)$. А так как $x(r) = y(r)$, то $\left(\tau - \tau', \int\limits_0^1 x(-rt)\,dt\,\varphi \right) = 0$. Устремляя r к нулю, приходим к равенству $(\tau - \tau', \varphi) = 0$, показывающему, ввиду произвольности φ, что $\tau = \tau'$. Лемма доказана.

4.13. Лемма 19 позволяет ввести следующее определение:

Определение. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность элементов, $\{\nu(n)\}$ — последовательность натуральных чисел такие, что $x_n \to x$; $x_n, x_n^2, \ldots, x_n^{\nu(n)} \in V$

при всех $n=1, 2, \ldots$ Если существует слабый предел последовательности $\nu(n)(x_n\theta_n - \theta_n)$, то мы будем называть его *касательным вектором в точке* $x \in G$ и обозначать через $\tau(x)$.

Ввиду леммы 19, $\tau(x)$ зависит только от x. При фиксированном x $\tau(x)$ является функцией из $L_2(G)$, аргумент этой функции нас впоследствии интересовать не будет, и мы его не выписываем. Ясно, что $\tau(e)=0$.

4.14. Обозначим через M множество всех элементов $x \in G$, обладающих следующими свойствами:

1) Существует однопараметрическая подгруппа $x(r)$ такая, что $x=x(1)$.

2) $x(r) \in V$ при $|r| \leqslant 1$.

Непосредственно очевидны еще три свойства множества M:

3) Для любой однопараметрической подгруппы $x(r)$ найдется такое положительное число s, что $x(r) \in M$ при $|r| \leqslant s$.

4) Если $x(r_0) \in M$, то $x(r) \in M$ при $|r| \leqslant r_0$.

5) M содержится в V.

Лемма 20. *Множество M бикомпактно.*

Доказательство. Так как $M \subset V$, то остается показать лишь, что M замкнуто. Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов из M сходится к некоторому элементу x. Элементы x_n содержатся в однопараметрических подгруппах, причем $x_n = x_n(1)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Так как $x_n(r) \in V$ при $|r| \leqslant 1$, то последовательность $\{y_n\}$ $\left(\text{где } y_n = x_n\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ такова, что $y_n, y_n^2, \ldots$ $\ldots, y_n^n \in V$ при любом $n=1, 2, \ldots$ По определению Q_α (4.1), $y_n \in Q_n$. Ввиду n° 4.2 ясно теперь, что $y_n \to e$. Применяя теперь лемму 13, получим однопараметрическую подгруппу $x(r)$ со свойствами: $x(r) \in V$ при $|r| \leqslant 1$, $x(1) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n^n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(1) = x$. Таким образом, $x \in M$. Следовательно, множество M замкнуто, и лемма доказана.

4.15. Лемма 21. *В любой точке $x \in M$ существует однозначно определенный касательный вектор $\tau(x)$. Если $y(r)$ и $y(tr)$ содержатся в M, то $\tau(y(tr)) = t\tau(y(r))$.*

Доказательство. Можно считать, что $x=x(1)$ и $x(r) \in V$ при $|r| \leqslant 1$. Последовательность натуральных чисел $\{\alpha\}$ и последовательность элементов $\left\{x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right\}$, а также любые их подпоследовательности удовлетворяют условиям определения n° 4.13, если только существует слабый предел последовательности $\left\{\alpha\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\theta_\alpha - \theta_\alpha\right)\right\}$. Поэтому ввиду слабой компактности сферы в $L_2(G)$ существование $\tau(x)$ будет доказано, если установить ограниченность норм $\left\|\alpha\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\theta_\alpha - \theta_\alpha\right)\right\|$. По определению множеств D_n (n° 4.1) $x\left(\frac{1}{\alpha}\right) \in D_{n(\alpha)}$, а ввиду леммы 15 для достаточно больших α $x\left(\frac{1}{k\alpha}\right) \in D_\alpha$. Используя определение функций Δ_n и лемму 9, получим:

$$\left\|\alpha\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\theta_\alpha - \theta_\alpha\right)\right\| \leqslant \alpha\Delta_\alpha\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \alpha\Delta_\alpha\left(x\left(\frac{1}{\alpha k}\right)^k\right) \leqslant \frac{3k\alpha}{\alpha} = 3k.$$

Тем самым доказана ограниченность норм, а, значит, и существование касательного вектора $\tau(x)$. Его единственность следует из леммы 19.

Далее, аналогичным образом можно показать, что некоторая подпоследовательность последовательности $\left\{\alpha\left(y\left(\frac{r}{\alpha}\right)\theta_\alpha-\theta_\alpha\right)\right\}$ слабо сходится к $\tau(y(r))$. Но тогда, очевидно, последовательность $\left\{[t\alpha]\left(y\left(\frac{r}{\alpha}\right)\theta_\alpha-\theta_\alpha\right)\right\}$ слабо сходится к $t\tau(y(r))$. Вместе с тем, согласно определению n° 4.13, ее слабый предел есть касательный вектор в точке $\lim\limits_{\alpha\to\infty} y\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{[t\alpha]}=y(rt)$.

Поэтому $\tau(y(rt))=t\tau(y(r))$, и лемма доказана.

4.16. Лемма 22. *Если $x=x(1)\in M$, то $\tau=\tau(x)$ совпадает с сильным пределом* $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{r}(x(r)\theta-\theta)$.

Доказательство. Как показано в предыдущем доказательстве из любой последовательности натуральных чисел можно выделить такую подпоследовательность $\{\alpha_n\}$, что будет существовать слабый предел $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\left(x\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\theta_n-\theta_n\right)=\tau(x)$. К последовательностям $\{\alpha_n\}$ и $\left\{x\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\right\}$ применимы тогда все рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 19. Будет применима, в частности, формула (2) из n° 4.12.

$$(x(r)\theta-\theta,\ \varphi)=\left(r\tau,\ \int_0^1 x(-rt)\,dt\varphi\right)=\left(r\int_0^1 x(rt)\,dt\,\tau,\ \varphi\right).$$

Так как эта формула справедлива для любого φ из $L_2(G)$, то $x(r)\theta-\theta=$ $=r\int_0^1 x(rt)\,dt\,\varphi$ или $\frac{1}{r}(x(r)\theta-\theta)=\int_0^1 x(rt)\,dt\tau$. При $r\to 0$ правая часть строго сходится к τ (n° 4.9). Лемма доказана.

4.17. Лемма 23. *Если $\tau(x)=0$ для $x\in M$, то $x=e$.*

Доказательство. Ввиду n° 4.14 считаем, что $x=x(1)$. Тогда $x\theta-\theta=x\left(\frac{1}{n}\right)^n\theta-\theta=\sum\limits_{i=0}^{n-1}x\left(\frac{i}{n}\right)\left(x\left(\frac{i}{n}\right)\theta-\theta\right)$, откуда $\|x\theta-\theta\|\leqslant$ $\leqslant\left\|n\left(x\left(\frac{1}{n}\right)\theta-\theta\right)\right\|$. При $n\to\infty$ ввиду леммы 22 получаем $\|x\theta-\theta\|\leqslant$ $\leqslant\|\tau(x)\|=0$, или $x\theta=\theta$, откуда, согласно лемме 18, $x=e$, что и требовалось доказать.

4.18. Лемма 24. *Пусть $x(r)$ и $y(r)$ — две однопараметрические подгруппы, все элементы которых при $|r|\leqslant 1$ содержатся в V, k — фиксированное натуральное число, определенное в лемме 15. Тогда существует такая однопараметрическая подгруппа $z(r)$ и последовательность $\{\alpha\}$ натуральных чисел, что $z(r)\in V$ при $|r|\leqslant\frac{1}{2k}$, $\tau(z(r))=\tau(x(r))+\tau(y(r))$ при $|r|\leqslant\frac{1}{2k}$, $z(r)=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{[r\alpha]}$ при любом вещественном r. Для любой бикомпактной окрестности единицы $W\subset V$ существует такая* *окрестность единицы W', что из включения $x(1)y(1)\in W'$ вытекают включения $z(r)\in W$ для всех r при $|r|\leqslant 1$.*

Доказательство. Выберем две последовательности элементов $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\alpha\}$ так, чтобы $x_\alpha, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^\alpha \in V$, $y_\alpha, y_\alpha^2, \ldots, y_\alpha^\alpha \in V$ и $x_\alpha^\alpha \to x(1)$, $y_\alpha^\alpha \to y(1)$. Такие последовательности существуют. Например, $x_\alpha = x\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ и $y_\alpha = y\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. Ясно, что x_α, $y_\alpha \in Q_\alpha = D_{n(\alpha)}$. По лемме 15, $\alpha \leqslant kn(\alpha)$ для достаточно больших α. Переход к подпоследовательности обеспечит справедливость этого неравенства для всех α. Тогда $(x_\alpha y_\alpha)^{\nu_\alpha} \in D_n^{2\nu_\alpha} \subset V$ для $\nu_\alpha = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\alpha}{2k}\right]$. Ввиду леммы 13 имеется однопараметрическая подгруппа $z'(r)$ такая, что $z'(r) = \lim\limits_{\alpha\to\infty} (x_\alpha y_\alpha)^{\left[\frac{r\alpha}{2k}\right]}$ при всех r и $z'(r)$ при $|r|\leqslant 1$. Полагая $z(r) = z'(2kr)$, получим, что $z(r) = \lim\limits_{\alpha\to\infty} (x_\alpha y_\alpha)^{[r\alpha]}$ при всех r и $z(r)\in V$ при $|r|\leqslant \frac{1}{2k}$.

Далее, для некоторой подпоследовательности $\{\alpha\}$ существует слабый предел $\lim \left[\frac{r\alpha}{2k}\right] (x_\alpha y_\alpha \theta_{n(\alpha)} - \theta_{n(\alpha)}) = \lim \left[\frac{r\alpha}{2k}\right] (x_\alpha (y_\alpha \theta_{n(\alpha)} - \theta_{n(\alpha)}) + (x_\alpha \theta_{n(\alpha)} - \theta_{n(\alpha)})) = \frac{r}{2k} (\tau(x) + \tau(y)) = \tau\left(x\left(\frac{r}{2k}\right)\right) + \tau\left(y\left(\frac{r}{2k}\right)\right)$, где $x = x(1)\in M$, $y = y(1)\in M$ (см. леммы 10 и 21). Но ввиду определения n° 4.13 этот предел есть касательный вектор в точке $z\left(\frac{1}{2k}\right)$. Из леммы 21 следует теперь, что $\tau(z(r)) = \tau(x(r)) + \tau(y(r))$ при $|r|\leqslant \frac{1}{2k}$. Остается доказать лишь последнее утверждение леммы. Предположим, что оно неверно. Тогда существовали бы две последовательности однопараметрических подгрупп $\{x_i(r)\}$, $\{y_i(r)\}$ и две последовательности натуральных чисел $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ такие, что $\beta_i \leqslant \alpha_i$, $x_i(1)\to v$, $y_i(1)\to v^{-1}$ (v — некоторый элемент из V), $x_i(r)$ и $y_i(r)$ содержится в V при $|r|\leqslant 1$, а

$$\left(x_i\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) y_i\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)\right)^{\beta_i} \bar{\in} W \quad \text{при всех} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right\}$ сходится к некоторому пределу δ $(0\leqslant\delta\leqslant 1)$. Ввиду леммы 20, $v\in M$, а потому v и v^{-1} содержатся в однопараметрической подгруппе. Теперь ясно, что с точностью до замены x на v и y на v^{-1} последовательности $\left\{x_i\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)\right\}$ и $\left\{y_i\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)\right\}$ обладают всеми свойствами рассмотренных выше последовательностей $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\alpha\}$. Аналогично тому, как определялась подгруппа $z(r)$, построим для данных последовательностей подгруппу $z_1(r)$. Ввиду (1)

$$z_1(\delta) \neq e. \tag{2}$$

С другой стороны, $\tau\left(z_1\left(\frac{\delta}{2k}\right)\right) = \frac{\delta}{2k}(\tau(v) + \tau(v^{-1})) = \frac{\delta}{2k}(\tau(v) - \tau(v)) = 0$. На основании леммы 23 заключаем, что $z_1\left(\frac{\delta}{2k}\right) = e$. Но тогда и $z_1(\delta) = e$ в противоречие с (2). Лемма доказана.

4.19. Лемма 25. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует бикомпактная окрестность единицы W_ε такая, что из $x \in M \cap W_\varepsilon$ вытекает $\|\tau(x)\| \leqslant \varepsilon$. Существует натуральное число m такое, что $\|\tau(x)\| \leqslant m$ для всех $x \in M$.*

Доказательство. Пусть k — натуральное число, определенное в лемме 15. Выберем натуральное число h и окрестность единицы U_ε так, чтобы $\frac{3k}{h} \leqslant \varepsilon$, $U_\varepsilon^h \subset V$. Найдется такая окрестность единицы W_ε, что из $x = x(1) \in W_\varepsilon$ и $x(r) \in V$ при $|r| \leqslant 1$ вытекают включения $x(r) \in U_\varepsilon$ при всех $|r| \leqslant 1$. Действительно, в противном случае существовала бы последовательность однопараметрических подгрупп $x_i(r)$ и последовательность чисел r_i такие, что $|r_i| \leqslant 1$, $x_i(1) \to e$, $x_i(r) \in V$ ($|r| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$), $x_i(r_i) \bar{\in} U_\varepsilon$ ($i = 1, 2, \ldots$).

Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\{x_i(r_i)\}$ сходится к некоторому элементу $\bar{x} \neq e$. Тогда для любого натурального числа l $\bar{x}^l = \lim x_i(lr_i) = \lim x_i(1)^{[lr_i]} x_i(s_i) = \lim x_i(s_i)$, где $s_i = lr_i - [lr_i]$. Так как $|s_i| < 1$, то $x_i(s_i) \in V$, откуда $\bar{x}^l \in V$, что невозможно ввиду отсутствия нетривиальных подгрупп в V. Следовательно, окрестность W_ε с требуемыми свойствами существует. Покажем, что она удовлетворяет требованиям леммы.

Если $x = x(1) \in M \cap W_\varepsilon$, то $x(r) \in V$ при $|r| \leqslant 1$ (n° 4.14). Тогда, по определению W_ε, $x(r) \in U_\varepsilon$ при $|r| \leqslant 1$ и, ввиду определения U_ε, $x(r) \in V$ при $|r| \leqslant h$. Следовательно, для любого натурального числа α

$$x\left(\frac{1}{\alpha}\right) \in Q_{h\alpha} = D_{n\,(h\alpha)}$$

(см. n° 4.1). На основании лемм 9, 15 и определения функций Δ_n (n° 2.10) имеем:

$$\left\| \alpha \left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\theta_{n\,(h\alpha)}} - \theta_{n\,(h\alpha)} \right\| \leqslant \alpha \Delta_{n\,(h\alpha)} \left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) \leqslant \frac{\alpha h \cdot 3}{hn\,(h\alpha)} \leqslant \frac{3kn\,(h\alpha)}{hn\,(h\alpha)} = \frac{3k}{h} \leqslant \varepsilon.$$

Переходя к пределу, получим $\tau(x(1)) \leqslant \varepsilon$ (см. [16], стр. 204, замечание), чем доказано первое утверждение леммы. Далее, если $\varepsilon = 2k$, то в качестве h можно взять 1, в качестве U_ε и W_ε окрестность V, откуда $\|\tau(x)\| \leqslant 3k$ для всех $x \in M \cap V = M$. Лемма доказана.

4.20. Покажем, что отображение τ множества $M \subset G$ в $L_2(G)$ непрерывно относительно сильной топологии в пространстве $L_2(G)$. В самом деле, пусть W_ε — окрестность единицы, определенная в лемме 25, W'_ε — окрестность, соответствующая окрестности W_ε в смысле леммы 23, x, y — два элемента из M такие, что $xy^{-1} \in W'_\varepsilon$. Заключим x и y в однопараметрические подгруппы так, чтобы $x = x(1)$, $y = y(1)$ (см. n° 4.14), и построим, как и в лемме 24, по подгруппам $x(r)$ и $y(r)$ однопараметрическую подгруппу $z(r)$. Ввиду выбора W'_ε, $z\left(\frac{1}{2k}\right) \in M \cap W_\varepsilon$ и, следовательно, $\left\|\tau\left(z\left(\frac{1}{2k}\right)\right)\right\| \leqslant \varepsilon$. С другой стороны $\tau\left(z\left(\frac{1}{2k}\right)\right) = \frac{1}{2k}(\tau(x) - \tau(y))$. Поэтому $\|\tau(x) - \tau(y)\| \leqslant 2k\varepsilon$. Поскольку ε произвольно, а k фиксировано, непрерывность отображения τ доказана.

4.21. Лемма 26. *Отображение τ множества $M \subset G$ в $L_2(G)$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно относительно сильной топологии пространства $L_2(G)$.*

Доказательство. Ввиду леммы 20 и n° 4.20 достаточно доказать лишь взаимную однозначность τ. Пусть $x=x(1)$ и $y=y(1)$ — два произвольных элемента из M таках, что $\tau(x)=\tau(y)$. Способом, указанным в лемме 24, построим по подгруппам $x(r)$ и $y(r)$ однопараметрическую подгруппу $z(r)$. Тогда

$$\tau\left(z\left(\frac{1}{2k}\right)\right)=\tau\left(x\left(\frac{1}{2k}\right)\right)+\tau\left(y\left(-\frac{1}{2k}\right)\right)=\frac{1}{2k}(\tau(x)-\tau(y))=0$$

(см. леммы 24 и 21). Ввиду леммы 23 $z\left(\frac{1}{2k}\right)=e$. Так как $z(r)\in V$ при $|r|\leqslant\frac{1}{2k}$ (лемма 24), а V не содержит нетривиальных подгрупп, то $z(r)=e$ при всех r. Для произвольного натурального числа n и произвольной функции $\varphi\in L_2(G)$ построим выражение

$$\Psi_n=(x\theta_n-y\theta_n,\ \varphi)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\alpha-1}\left(x\left(\frac{i+1}{\alpha}\right)y\left(\frac{\alpha-i-1}{\alpha}\right)\theta_n-x\left(\frac{i}{\alpha}\right)y\left(\frac{\alpha-i}{\alpha}\right)\theta_n,\ \varphi\right). \quad (1)$$

Пусть i_0 — номер одного из слагаемых правой части формулы (1), имеющего наибольшую абсолютную величину. Обозначим это слагаемое через Φ_n. Легко проверить, что

$$\Phi_n=\left(u_\alpha^{-1}x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(-\frac{1}{\alpha}\right)u_\alpha\theta_n-\theta_n,\ \varphi\right),\quad \text{где}\quad u_\alpha=y\left(\frac{\alpha-i_0}{\alpha}\right). \quad (2)$$

Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\{u_\alpha\}$ сходится к некоторому элементу $u\in V$. Далее, найдется такое положительное число s, что при $|r|\leqslant s$ $g^{-1}x(r)g$ и $g^{-1}y(r)g$ содержатся в V для любого $g\in V$. Тогда $x_\alpha=u_\alpha^{-1}x\left(\frac{1}{\alpha}\right)u_\alpha$ и $y_\alpha=u_\alpha^{-1}y\left(-\frac{1}{\alpha}\right)u_\alpha$ содержатся, очевидно, в $Q_{[\alpha s]}=D_{n_\alpha}$, где через n_α обозначено число $n([\alpha s])$ (см. n° 4.1). Но $[\alpha s]\geqslant n_\alpha\geqslant\frac{[\alpha s]}{k}$ (см. лемму 15 и n° 4.1). Можно предполагать поэтому, что последовательность $\left\{\frac{n_\alpha}{\alpha}\right\}$ сходится к некоторому числу t: $1\geqslant t\geqslant\frac{s}{k}>0$. Так как $x_\alpha y_\alpha\in D^2_{n_\alpha}$, то ввиду леммы 10 можно считать, что существует слабый предел последовательности $n_\alpha(x_\alpha y_\alpha\theta_{n_\alpha}-\theta_{n_\alpha})$. Ясно, что $(x_\alpha y_\alpha)^l\in V$ при всех l между 1 и $\left[\frac{n\alpha}{2}\right]$. Последовательность элементов

$$(x_\alpha y_\alpha)^{\left[\frac{1}{2}n_\alpha\right]}=u_\alpha^{-1}\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\left[\alpha\cdot\frac{1}{2}\frac{n_\alpha}{\alpha}\right]}u_\alpha$$

сходится к $u^{-1}z\left(\frac{1}{2}t\right)u=e$ ввиду леммы 24 и того, что последовательность

$$\left\{\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\left[\alpha\frac{1}{2}\left(\frac{n_\alpha}{\alpha}-t\right)\right]}\right\}$$

сходится к e (для любой предельной точки $\bar{x}$ второй последовательности $\bar{x}^l \in V$ при любом натуральном l, ибо $\left[\alpha\frac{1}{2}\left(\frac{n_\alpha}{\alpha}-t\right)l\right] \leqslant n_\alpha$ для достаточно больших α). Но тогда, по определению 4.13, $\frac{1}{2}n_\alpha(x_\alpha y_\alpha \theta_{n_\alpha}-\theta_{n_\alpha})$ слабо сходится к $\tau(e)=0$ и

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha\Phi_{n_\alpha}=\lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{2\alpha}{n_\alpha}\frac{n_\alpha}{2}(x_\alpha y_\alpha\theta_{n_\alpha}-\theta_{n_\alpha}),\ \psi\right)=\frac{2}{t}(\tau(e),\ \psi)=0.$$

Вместе с тем, очевидно, что $|\Psi_{n_\alpha}| \leqslant \alpha|\Phi_{n_\alpha}|$, откуда получаем: $\Psi_{n_\alpha}\to 0$, или, переходя к пределу, $(x\theta-y\theta,\ \psi)=0$. Ввиду произвольности ψ $x\theta-y\theta=0$ или $y^{-1}x\theta=\theta$. По лемме 18, $y^{-1}x=e$, т. е. $x=y$. Тем самым доказана взаимная однозначность отображения τ и завершено доказательство леммы.

4.22. Теорема 5. *Множество K всех однопараметрических подгрупп*[1]) *локально бикомпактной группы G без малых подгрупп может быть превращено в конечномерное вещественное линейное пространство так, что внутренние автоморфизмы группы индуцируют линейные преобразования в K, а возникающее таким образом линейное представление группы непрерывно.*

Доказательство. Определим умножение элементов из K на вещественные числа, полагая $tx(r)=x(tr)$ для любого вещественного числа t и любой однопараметрической подгруппы $x(r)$. Рассмотрим множество K_1 однопараметрических подгрупп $x(r)$, для которых $x(1)\in M$ или, что то же самое $x(r)\in V$ при $|r|\leqslant 1$. Ясно, что справедливо следующее свойство: (C). Для любой однопараметрической подгруппы $x(r)$ найдется такое положительное число t, что $x(tr)\in K_1$. На множестве K_1 определим бинарную операцию сложения, полагая $x(r)+y(r)=z(r)$, где

$$z(r)=\lim_{\alpha\to\infty}\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{[r\alpha]}$$

есть однопараметрическая подгруппа, определенная в лемме 24. Поскольку для достаточно малых r $\tau(z(r))=\tau(x(r))+\tau(y(r))$ (см. лемму 24), а отображение τ взаимно однозначно, то построенная операция коммутативна и однозначна. Далее,

$$z(sr)=\lim_{\alpha\to\infty}\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{[sr\alpha]}=\lim_{\beta\to\infty}\left(x\left(\frac{s}{\beta}\right)y\left(\frac{s}{\beta}\right)\right)^{[r\beta]}=x(sr)+y(sr),$$

откуда $s(x(r)+y(r))=sx(r)+sy(r)$. Определяя операцию сложения для произвольных однопараметрических подгрупп по правилу

$$z(r)=x(r)+y(r)=\frac{1}{t}(x(tr)+y(tr))$$

(t — любое положительное число, для которого $x(tr)$, $y(tr)\in K_1$), мы, очевидно, превратим все множество K в вещественное линейное пространство.

---

[1]) Однопараметрические подгруппы, совпадающие как множества, но имеющие различные параметризации, считаются различными.

Из определения ясно, что для любых $x(r)$ и $y(r)$ справедлива формула

$$x(r)+y(r)=\lim_{\alpha\to\infty}\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{[r\alpha]}.$$

Введем теперь на пространстве K норму, полагая

$$\| x(r) \| = \left\| \frac{1}{r_0}\tau(x(r_0)) \right\|,$$

где r_0 — любое положительное число, выбранное так, чтобы $x(r_0)\in M$ (см. n° 4. 14, 3)). Ввиду леммы 21, норма определена для любой однопараметрической подгруппы и не зависит от выбора r_0. Из взаимной однозначности отображения τ вытекает, что нулевую норму имеет лишь подгруппа $x(r)\equiv e$, являющаяся нулевым элементом в K. Справедливость остальных свойств нормы следует из лемм 21 и 24 и соответствующих свойств нормы в $L_2(G)$.

Для любой однопараметрической подгруппы $x(r)$ обозначим через r_x верхнюю грань значений r, для которых $x(r)\in V$. Ясно, что $x(r_x)$ содержится в M и принадлежит границе окрестности V. Ввиду непрерывности и взаимной однозначности отображения τ нижняя грань d норм $\|\tau(x(r_x))\|$ ($x(r)$ пробегает K) положительна. Если теперь $\|x(r)\|\leqslant d$, то $x(1)\in M$, ибо иначе соответствующее $r_x<1$ и $\|x(r)\|=\left\|\frac{1}{r_x}\tau\cdot(x(r_x))\right\|\geqslant\frac{1}{r_x}d>d$. Следовательно, сфера S_d, состоящая из элементов $x(r)$ с нормой $\leqslant d$, содержится в K_1. Если $z(r)=x(r)-y(r)$, а $x(r)$ и $y(r)$ содержатся в K_1, то (см. лемму 24):

$$\|z(r)\|=\left\|2k\tau\left(z\left(\frac{1}{2k}\right)\right)\right\|=2k\left\|\tau\left(x\left(\frac{1}{2k}\right)\right)-\tau\left(y\left(\frac{1}{2k}\right)\right)\right\|=\|\tau(x(1))-\tau(y(1))\|.$$

Ввиду взаимной однозначности и взаимной непрерывности τ отсюда следует, что отображение f: $x(r)\to x(1)$ осуществляет гомеоморфизм множества K_1 на бикомпактное множество M (см. n° 4.14 и лемму 20). Поэтому замкнутая сфера $S_d\subset K_1$ бикомпактна и, следовательно, пространство K конечномерно (см. [16], стр. 115).

Для любого элемента $g\in G$ и любой пары однопараметрических подгрупп $x(r)$, $y(r)$ имеем: $g^{-1}(x(r)+y(r))g=g^{-1}\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(x\left(\frac{1}{\alpha}\right)y\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{[r\alpha]}g=$ $=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(g^{-1}x\left(\frac{1}{\alpha}\right)g\cdot g^{-1}y\left(\frac{1}{\alpha}\right)g\right)^{[r\alpha]}=g^{-1}x(r)g+g^{-1}y(r)g$. Если теперь t — любое вещественное число, а $z(r)=g^{-1}x(r)g$, то $tz(r)=z(tr)=g^{-1}x(tr)g=$ $=g^{-1}(tx(r))g$. Таким образом, внутренние автоморфизмы группы индуцируют в K линейные преобразования, и мы получаем некоторое линейное представление φ группы G.

Пусть, наконец, g — произвольный элемент из G, а U — произвольная окрестность единицы в M. Из определения множества M (n° 4.14) и непрерывности групповой операции вытекает существование такой окрестности U_1 единицы в M и такой окрестности W элемента g, что $h^{-1}U_1h\subset U$ для любого $h\in W$. Поскольку введенный выше гомеоморфизм f K_1 на M очевидным образом перестановочен с внутренними автоморфизмами группы, то тем самым доказана непрерывность представления φ и завершено доказательство теоремы.

§ 5. Строение локально бикомпактных групп

Настоящий параграф представляет собою завершающий этап доказательства сформулированной во введении теоремы А. Предварительно, на основе результатов § 4, устанавливается, что локально бикомпактные группы без малых подгрупп являются группами Ли. Этот результат принадлежит Глисону [7] и Ямабе [10]. Объединяя его с результатами § 1 и 3, получаем теорему А, из которой в свою очередь вытекает положительное решение пятой проблемы Гильберта. Разумеется, этот метод решения пятой проблемы существенно отличается от первоначального решения Глисона, Монтгомери и Зиппина [8]. Теорема 7, принадлежащая Курaниси [20], Ивасава [11] и Глисону [7], также доказывается наиболее рациональным в настоящее время способом. Лемма 27 принадлежит Ивасава [11] (см. также [12]), лемма 28 — Мальцеву [6].

5.1. Лемма 27. *Если локально бикомпактная группа G содержит замкнутый центральный нормальный делитель A такой, что G/A и A — группы Ли, то и G является группой Ли.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда группа A связна и одномерна. Через φ обозначим естественный гомоморфизм G на $G/A=G'$. В группе G существует локальное сечение смежных классов G по A, т. е. такое множество K с бикомпактным замыканием, что φ осуществляет гомеоморфное отображение K на некоторую окрестность W единицы группы G', имеющую бикомпактное замыкание. Действительно, пусть $g_1'(r), \cdots, g_n'(r)$ — система однопараметрических подгрупп, задающая в G' систему канонических координат второго рода, $g_1(r), \cdots, g_n(r)$ — однопараметрические подгруппы в G, выбранные так, чтобы $\varphi(g_1(r))=g_1'(r), \cdots, \varphi(g_n(r))=$ $=g_n'(r)$ (см. лемму 4). Тогда в качестве K можно выбрать произведение $M_1\cdots M_n$, где M_i — множество точек $g_i(r)$ при $|r|<\delta$, а δ — некоторое достаточно малое положительное число. Не нарушая общности, можно считать, что в U' введена бесконечно дифференцируемая система координат $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, т. е. такая система координат, в которой закон умножения задается бесконечно дифференцируемыми функциями. Группа A, будучи одномерной, имеет локальную координату $x=x(a)$ $(a\in A)$ с законом умножения: $x(a_1a_2)=x(a_1)+x(a_2)$.

Обозначим через ψ гомеоморфизм U' на K. Ввиду леммы 5 § 1 в некоторой окрестности единицы каждая точка из G представляется однозначно в виде $\psi(s)a$, где $a\in A$, $s\in G'$. В группе G имеется, таким образом, локальная система координат $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, x)$. Если $s, t\in G'$, то $\psi(s)\psi(t)=\psi(st)a(s, t)$. Ясно, что координата $x(a(s, t))=x(s, t)$ является непрерывной (вещественной) функцией от пары аргументов $s, t\in G'$. Из ассоциативного закона вытекает:

$$x(s, t)+x(st, r)=x(t, r)+x(s, tr) \quad (\text{где } s, t, r\in G'). \tag{1}$$

Пусть $\lambda(s)$ — какая-нибудь бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция на G', обращающаяся в нуль вне U' и не равная тождественно нулю. Введем на G' левоинвариантную меру, нормированную условием $\int\lambda(s)\,ds=1$, и определим вспомогательную функцию $y(s)=\int x(s, t)\lambda(t)\,dt$.

Эта функция непрерывна, поскольку подынтегральное выражение обращается в нуль вне компактного множества, а $x(s,\ t)$ равномерно непрерывна на любом компактном множестве. Беря элемент $b(s)\in A$ с координатой $y(s)$, определим отображение $\psi'(s)$ U' в G, полагая $\psi'(s)=b(s)^{-1}\psi(s)$. Поскольку замыкание U' компактно, ψ' осуществляет гомеоморфизм окрестности U' на некоторое новое локальное сечение $K'=\psi'(U')$ смежных классов G по A. Снова, как и выше, имеем непрерывную функцию $x'(s,\ t)$ и элемент $a'(s,\ t)\in A$ с координатой $x'(s,\ t)$, удовлетворяющий условию $\psi'(s)\psi'(t)=\psi'(st)a'(s,\ t)$. Подставляя значение $\psi'(s)$, вспоминая, что подгруппа A центральная, и сокращая на $\psi(st)$, получим $b(s)^{-1}b(t)^{-1}a(s,\ t)=b(st)^{-1}a'(s,\ t)$, или в координатах $x'(s,\ t)=y(st)-y(s)-y(t)+x(s,\ t)$.

Используя определение функции $y(s)$ и $\int\lambda(r)\,dr=1$, получим:

$$x'(s,\ t)=\int(x(st,\ r)-x(s,\ r)-x(t,\ r)+x(s,\ t))\lambda(r)\,dr.$$

Ввиду (1)

$$x'(s,\ t)=\int(x(s,\ tr)-x(s,\ r))\lambda(r)\,dr=\int x(s,\ q)\lambda(t^{-1}q)\,dq-\int x(s,\ t)\lambda(r)\,dr.$$

Поскольку интегралы берутся фактически по компактным множествам, можно дифференцировать по параметру. Отсюда следует, что функция $x'(s,\ t)$ бесконечно дифференцируема по совокупности координат второго аргумента.

Введем теперь правоинвариантную меру d^*r с нормировкой $\int\lambda(r)\,d^*r=1$. Функция $x'(s,\ t)$ также удовлетворяет, очевидно, соотношению (1). Умножая это соотношение на $\lambda(s)$, интегрируя и используя нормировку, получим:

$$\int x'(s,\ t)\lambda(s)\,d^*s+\int x'(st,\ r)\lambda(s)\,d^*s=x'(t,\ r)+\int x'(s,\ tr)\lambda(s)\,d^*s. \qquad (2)$$

Так как $\int x'(st,\ r)\lambda(s)\,d^*s=\int x'(p,\ r)\lambda(pt^{-1})\,d^*p$, то из равенства (2) следует бесконечная дифференцируемость функции $x'(t,\ r)$ также и по совокупности координат первого аргумента.

Наконец, введем функцию $y'(s)=\int x'(s,\ t)\lambda(t)\,dt$, элемент $b'(s)\in A$ с координатой $y'(s)$ и определим отображение ψ'' окрестности U' в G, полагая $\psi''(s)=b'(s)^{-1}\psi'(s)$. В некоторой окрестности единицы элементы группы G допускают однозначное разложение вида $g=\psi''(s)a$, $h=\psi''(t)b$ (где $s,\ t\in U'$, $a,\ b\in A$). При этом

$$gh=\psi''(st)a''(s,\ t)ab, \qquad (3)$$

а для координаты $x''(s,\ t)$ элемента $a''(s,\ t)\in A$ получим, как и выше, выражение $x''(s,\ t)=\int x'(s,\ q)\lambda(t^{-1}q)\,dq-\int x'(s,\ r)\lambda(r)\,dr$, показывающее, что функция $x''(s,\ t)$ бесконечно дифференцируема по совокупности координат обоих аргументов. Соотношение (3) показывает тогда, что в G введена бесконечно дифференцируемая система координат. Следовательно, G является группой Ли, и лемма доказана.

5.2. Лемма 28. *Если в локально бикомпактной группе G имеется связный коммутативный нормальный делитель A такой, что A и G/A — группа Ли, то для любой однопараметрической подгруппы $g'(t)$ из $G' = G/A$ найдется однопараметрическая подгруппа $g(t) \in G$, отображающаяся на $g'(t)$ при естественном отображении G на G'.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что замыкание $g'(t)$ совпадает с G', так что группа G' коммутативна и связна. Применяя индукцию, можно предполагать также, что A не содержит связных нормальных делителей группы G, отличных от A и от $\{e\}$. Ввиду лемм 2 и 4 достаточно рассмотреть случай, когда A — нецентральная векторная подгруппа. Пусть g — элемент из G, неперестановочный хотя бы с одним элементом из A. Легко видеть, что отображение $a \to g^{-1}aga^{-1}$ $(a \in A)$ является линейным отображением векторного пространства A в себе. Обозначим через B ядро этого отображения. Если $b \in B$, $h \in G$, то $g^{-1}bg = b$ и $h^{-1}bh = h^{-1}g^{-1}bgh = (uhg)^{-1}b(uhg)$, где $u \in A$ и окончательно $h^{-1}bh = g^{-1}(h^{-1}bh)g$, т. е. $h^{-1}bh \in B$. Следовательно, подгруппа B инвариантна в G. Будучи, кроме того, связной, она согласно нашим условиям должна совпадать с $\{e\}$ или с A. Поскольку существуют элементы из A, неперестановочные с g, то возможен лишь первый случай, и, следовательно, отображение $a \to g^{-1}aga^{-1}$ взаимно однозначно. Иначе говоря, уравнение $g^{-1}ugu^{-1} = v$ имеет одно и только одно решение $u \in A$ для любого $v \in A$. Обозначим через C централизатор элемента g (в G). Ясно, что $C \cap A = \{e\}$. Покажем, что $AC = G$. Действительно, пусть x — произвольный элемент из G. Ввиду предположенной коммутативности фактор-группы G/A, $g^{-1}xgx^{-1} = v \in A$. Найдем $u \in A$, для которого $g^{-1}ugu^{-1} = v$. Имеем $xgx^{-1} = ugu^{-1}$, так что элемент $u^{-1}x$ содержится в C. Но тогда $x \in uC \subset AC$ и ввиду произвольности выбора x $AC = G$. Естественное отображение φ G на G' индуцирует непрерывный взаимно однозначный гомоморфизм ψ C на G'. Ввиду связности группа G является объединением счетного числа бикомпактных подмножеств. Но тогда, по известной теореме ([13], теорема 12), гомоморфизм ψ открыт и является, следовательно, топологическим изоморфизмом. Полагая $g(t) = \psi^{-1}(g'(t))$, завершим доказательство леммы.

5.3. Теорема 6. *Локально бикомпактная группа G без малых подгрупп является группой Ли.*

Доказательство. Обозначим через A ядро представления группы G, построенного в теореме 5 § 4. Согласно построению, элементы из A перестановочны с элементами любой однопараметрической подгруппы из G. Кроме того, A очевидным образом является локально бикомпактной группой без малых подгрупп. Обозначим через B замыкание подгруппы, порожденной всеми однопараметрическими подгруппами из A. Ясно, что B содержится в центре группы A и потому коммутативна. Не содержа малых подгрупп, она является группой Ли (см. [13], теорема 50). В таком случае найдется дискретная подгруппа $C \subset B$ с бикомпактной фактор-группой $B/C = B'$. Если группа A/B имеет сколь угодно малые подгруппы, то в ней найдется бикомпактная подгруппа D/B, содержащая сколь угодно малые подгруппы (см. лемму 12). Группа $D' = D/C$ содержит бикомпактный нормальный делитель $B' = B/C$ с бикомпактной фактор-группой $D'/B' \cong D/B$ и потому сама бикомпактна ([14], стр. 27). Вместе с тем она не может быть группой Ли, ибо ее фактор-группа D'/B' содержит сколь угодно малые подгруппы. Но тогда, как известно ([13], теорема 67), D' обладает сколь угодно малыми подгруппами, и мы приходим к противоречию, так как D' локально изоморфна $D \subset G$. Поэтому A/B есть группа без малых подгрупп. Если она недискретна, то она содержит нетривиальную однопараметрическую подгруппу (см. следствие леммы 13), замыкание которой будет коммутативной локально бикомпактной группой без малых подгрупп, т. е. группой Ли. Ввиду леммы 28 в таком случае в A имелась бы однопараметрическая подгруппа, не содержащаяся в B, в противоречие с определением B. Следовательно, группа A/B дискретна. Ясно, что в таком случае B совпадает со связной компонентой единицы в A и потому инвариантна в G.

Локально бикомпактная группа G/A допускает непрерывное взаимно однозначное линейное представление и потому, согласно сформулированной во введении теоремы Картана, является группой Ли. Но тогда группой Ли будет и локально изоморфная ей группа G/B. Пусть H/B — связная компонента единицы в G/B. Тогда группа G/H дискретна и потому достаточно доказать, что H/B есть группа Ли. Будучи связной группой Ли, группа H/B порождается элементами, содержащимися в однопараметрических подгруппах. Это же свойство имеет и B. Но тогда, ввиду леммы 28, группа H также порождается элементами своих однопараметрических подгрупп. Ввиду определения подгрупп A и $B \subset A$, отсюда следует, что B содержится в центре группы H. Применяя лемму 27, получим, что H, а значит, и G являются группами Ли. Теорема доказана.

5.4. Теорема 7. *Если топологическая группа G содержит нормальный делитель N такой, что N и G/N — группы Ли, то и G является группой Ли.*

Доказательство. Группа G локально бикомпактна ([14], стр. 167). Так как N и G/N не содержат малых подгрупп, то найдется окрестность единицы U такая, что UN/N и $N \cap U$ не содержат нетривиальных подгрупп. В таком случае U также не может содержать нетривиальных подгрупп и, в силу теоремы 6, G является группой Ли.

5.5 Теорема 8. *Если связная компонента единицы K локально бикомпактной группы G определяет бикомпактную фактор-группу G/K, то в любой окрестности единицы группы G найдется бикомпактный нормальный делитель B такой, что G/B — группа Ли.*

Доказательство. Теорема является непосредственным следствием теоремы 4 из § 3 и теоремы 6 настоящего параграфа.

5.6. Теорема 9. *Любая локально бикомпактная группа G содержит открытую подгруппу, являющуюся проективно-лиевой группой.*

Доказательство. Пусть K — связная компонента единицы в G. Фактор-группа G/K вполне несвязна и потому содержит открытую бикомпактную подгруппу H/K ([13], теорема 16). Подгруппа H открыта в G и ввиду предыдущей теоремы и определения 1.1 является проективно-лиевой группой.

5.7. Замечание. Как известно, любая коммутативная локально бикомпактная группа является проективно-лиевой. В общем случае это уже неверно. Примеры локально бикомпактных групп, не являющихся проективно-лиевыми, построены в [19] и в [12]. В [19] показано также, что если локально бикомпактная группа порождается бикомпактным подмножеством своих элементов и локально нильпотентна, то она является проективно-лиевой. Легко понять, что применительно к локально нильпотентным группам этот результат усиливает теоремы 8 и 9, однако уже для разрешимых групп подобное усиление оказывается невозможным.

5.8. Перейдем теперь к основным теоремам настоящей статьи, вскрывающим локальную структуру локально бикомпактных групп.

Теорема А. *Для любой локально бикомпактной группы G и любой окрестности U ее единицы найдется такая открытая окрестность V единицы этой группы, которая содержится в U и распадается в прямое произведение связной локальной группы Ли L и бикомпактной группы B. Если группа G не является вполне несвязной, то окрестность U может быть выбрана так, что при любом разложении указанного вида локальная группа Ли L имеет положительную размерность.*

Доказательство. Первая часть теоремы является непосредственным следствием теоремы 9 и теоремы 2 § 1. Пусть теперь связная компонента единицы в G нетривиальна. Тогда существует окрестность единицы U, которая не содержит окрестностей единицы, являющихся одновременно открытыми и замкнутыми в G. Ясно, что U удовлетворяет требованиям второй части теоремы.

5.9. Замечание. Из доказательства теоремы 2 вытекает, что подгруппа B в теореме А может быть выбрана так, чтобы она содержалась в любом наперед заданном нормальном делителе N группы G таком, что G/N есть группа Ли.

5.10. Теорема Б. *Любая локально бикомпактная группа конечной размерности*[1]) *локально изоморфна прямому произведению связной локальной группы Ли и вполне несвязной бикомпактной группы.*

Доказательство. В силу теоремы А группа G локально изоморфна прямому произведению связной локальной группы Ли L_0 и бикомпактной группы B_0. Если группа B_0 не является вполне несвязной, то она локально изоморфна прямому произведению связной локальной группы Ли L_1 размерности $\geqslant 1$ и бикомпактной группы B_1. Продолжая таким образом, получим локальные изоморфизмы $G \cong L_0 \times L_1 \times \cdots \times L_n \times B_n$, где $L_1, \cdots, L_n$ — связные локальные группы Ли положительной размерности, а B_n — бикомпактные группы ($n = 1, 2, \cdots$). Будучи конечномерной, группа G не может содержать подмножеств, гомеоморфных евклидовым кубам сколь угодно больших размерностей. Поэтому найдется такое n, что группа B_n вполне несвязна. Так как $L_0 \times L_1 \times \cdots \times L_n$ есть связная локальная группа Ли, то теорема доказана.

[1]) Поскольку в доказательстве речь будет идти лишь о размерности евклидовых кубов, то понятие размерности в этой и в следующей теореме может пониматься в любом смысле.

5.11. Из теоремы Б непосредственно следует результат, дающий положительное решение пятой проблемы Гильберта.

Теорема В. *Всякая локально связная локально бикомпактная группа конечной размерности является группой Ли.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Hilbert, Mathematische Probleme, Götting. Nachr. (1900), 253—297.
[2] J. Neumann, Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. of Math. **34** (1933), 170—190.
[3] Л. С. Понтрягин, Sur les groupes topologiques compacts et le cinquime probleme de M. Hilbert, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **198** (1934), 238—240.
[4] Л. С. Понтрягин, The theory of topological commutative groups, Ann. of Math **35** (1934), 361—388.
[5] C. Chevalley, Two theorems on solvable topological groups, Lectures in Topology, Univ. of Mich. Press. Ann. Arbor, 1941.
[6] А. И. Мальцев, Топологические разрешимые группы, Матем. сб. **19**, № 2 (1946), 165—174.
[7] A. Gleason, Groups without small subgroups, Ann. of Math. **56**, № 2 (1952), 193—212.
[8] D. Montgomery and L. Zippin, Small subgroups in finite dimensional groups. Ann. of Math. **56**, № 2 (1952), 213—241.
[9] H. Yamabe, On conjecture of Iwasawa and Gleason, Ann. of Math. **58**, № 1 (1953), 48—54.
[10] H. Yamabe, A generalization of a theorem of Gleason, Ann. of Math. 58, № 2 (1953), 351—365.
[11] K. Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math. **50**, № 3 (1949), 507—538.
[12] D. Montgomery and L. Zippin, Topological transformation groups, Interscience publishers, New York, 1955.
[13] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М., Гостехиздат, 1954.
[14] А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950.
[15] К. Шевалле, Теория групп Ли, М., ИЛ, 1948.
[16] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального, анализа, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
[17] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., ОНТИ, 1937.
[18] A. Gleason, The structure of locally compact groups, Duke Math. Journ. **18**, № 1 (1951), 85—104.
[19] В. М. Глушков, Локально нильпотентные локально бикомпактные группы, Труды Моск. матем. об-ва **4** (1955), 291—332.
[20] M. Kuranishi, On Euclidean local groups satisfying certain conditions, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 372—380.